

信州大学工学部 正会員 寒川典昭

" " 荒木正夫

オービック株式会社 " 渡辺輝彦

1. はじめに

水工計画の精度は確率水文量の精度に大きく依存する。ところが、水文資料は小標本である場合が多く、求められた水文量には多くの不確定さが存在することは否めない。例えば、右図は資料数と50年及び100年確率水文量の関係を示したものであり、確率水文量の不確定さがうかがわれる。我々は、この不確定さの定式化を正規分布の母数のエントロピーという立場から展開してきた。¹⁾ 本稿は、そこで導出された理論式の挙動を知るために、年降水量を用いて資料数とエントロピーとの関係を明らかにし、確率分布の母数推定の信頼性を議論したものである。

2. 正規情報を取り入れた母数の事後確率分布のエントロピー

(1) 平均：未知、分散：既知の場合

θ を平均とし、 θ とは無関係に一定の既知の分散 v をもって、 n 個の確率変数 $\tilde{x}(n) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ が互いに独立に正規確率法則に従うとき、 $\tilde{x}(n) = x(n)$ が得られた後の確率変数 $\tilde{\theta}$ の事後確率分布のエントロピーは (1) 式で与えられる。(1) 式に含まれるパラメータは (2) 式から決定される。

(2) 平均：未知、分散：未知の場合

平均 θ 、精度 $h (= 1/v)$ をもって、 $\tilde{x}(n)$ が互いに独立に正規確率法則に従うとき、 $\tilde{x}(n) = x(n)$ が得られた後の確率変数 $(\tilde{\theta}, \tilde{h})$ の事後確率分布のエントロピーは (3) 式で与えられる。

(3) 式に含まれるパラメータは (4) ~ (13) 式で決定される。ただし、 n' 、 α' 、 β' 、 ν' は $(\tilde{\theta}, \tilde{h})$ の事前率分布のパラメータである。

3. 実測資料への適用

(1) 平均：未知、分散：既知の場合

v_θ 、 v は事前情報である。ここでは次のように与えた。

v : 観測最大資料数 ($n_{\max}$) から算定される分散

$$v_\theta = \frac{1}{5} \frac{v}{n_{\max}} / 2, \frac{1}{3} \frac{v}{n_{\max}} / 2, \frac{v}{n_{\max}} / 2, 3 \frac{v}{n_{\max}} / 2, 5 \frac{v}{n_{\max}} / 2.$$

図-2 は平均推定の不確定さ (エントロピー) と資料数との関係を示したものである。(1)、(2) 式及び図-2 から、資料数が増加するとエントロピーが減少し、信頼性が増すこと、 v_θ が大きい程エントロピーの値が大きくなること、及び資料数が小さいとき程エントロピーの低下分が大きくなって、信頼性の増

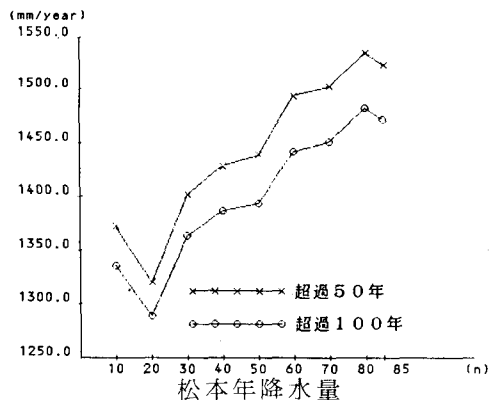


図-1 確率水文量の変動性

表-1 数式の一覧

$H(\theta) = \ln(2\pi e v_{\theta} x(n))^{1/2} \quad (1)$
$1/v_{\theta} x(n) = (1/v_\theta) + (n/v) \quad (2)$
$H(\theta, h) = -\ln D + G \cdot \{ 1 + \ln E - \psi(G + \frac{1}{2}) \} + 1 \quad (3)$
$D = \frac{n'^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\Gamma(\nu''/2)} (\frac{1}{2} \beta'' \nu'')^{\nu''/2} \quad (4)$
$E = \frac{1}{2} \nu'' \beta'' \quad (5) \quad G = \frac{1}{2} (\nu'' - 1) \quad (6)$
$n'' = n' + n \quad (7) \quad \nu'' = \nu' + n \quad (8)$
$\beta'' = \frac{(\nu' \beta' + n' \alpha'^2) + (\nu S + n \bar{x}^2) - n'' \alpha'^2}{\nu' + n} \quad (9)$
$\alpha'' = \frac{n' \alpha' + n \bar{x}}{n' + n} \quad (10) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (11)$
$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (12) \quad \nu = n-1 \quad (13)$
$\psi(\cdot)$: digamma function

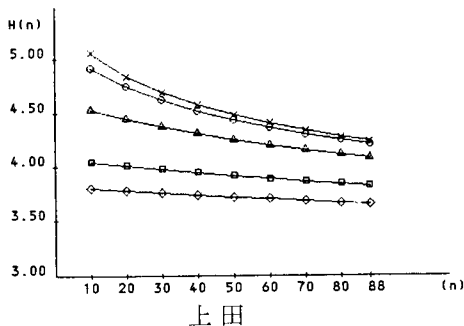
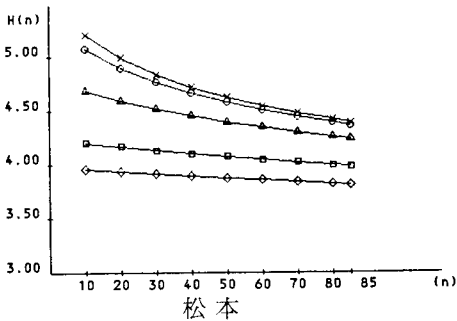
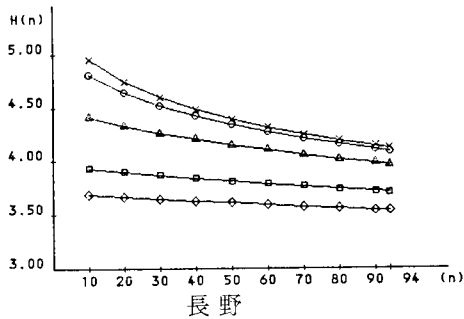


図-2 平均のエントロピー変化

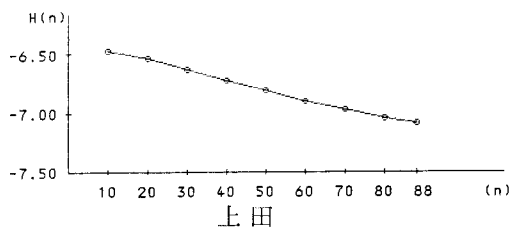
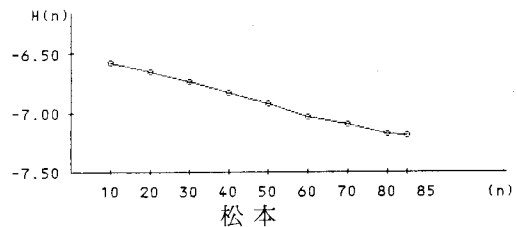
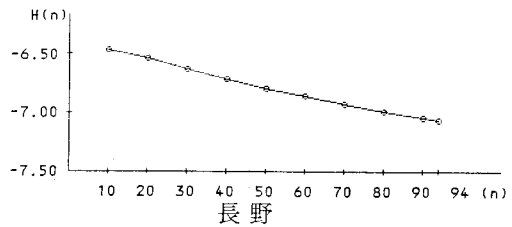


図-3 平均と分散のエントロピー変化

$$\begin{aligned}
 & \diamond \quad V_0 = \frac{1}{5} \cdot \frac{V}{\Omega_{\max}/2} \\
 & \square \quad V_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{V}{\Omega_{\max}/2} \\
 & \triangle \quad V_0 = \frac{V}{\Omega_{\max}/2} \\
 & \circ \quad V_0 = 3 \cdot \frac{V}{\Omega_{\max}/2} \\
 & \times \quad V_0 = 5 \cdot \frac{V}{\Omega_{\max}/2}
 \end{aligned}$$

加率が増大することがわかる。

(2) 平均：未知、分散：未知の場合

n' 、 α' 、 β' 、 ν' は事前情報である。ここではすべての観測資料を用いて次のように与えた。

$$n' = n_{\max}, \quad \alpha' = \frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{n'} x_i, \quad \beta' = \frac{1}{n'-1} \sum_{i=1}^{n'} (x_i - \alpha')^2, \quad \nu' = n' - 1.$$

図-3 は平均と分散推定の不確定さと資料数との関係を示したものである。図よりエントロピーはほぼ直線的に減少していることがわかる。しかし、他の観測所ではそうでない場合もあり、このとき、折れ線の傾きが急になる場合には、増やした資料の情報量が多く、信頼性が大きく増大し、傾きが緩やかになる場合には、増やした資料の情報量は少なく、信頼性があまり増加しなかったことが読み取れる。

4. あとがき

本稿に用いた $\hat{\gamma}(n)$ は正規確率法則に従うものであった。しかし、水文統計上、他の確率法則に従う場合を議論することも重要なことである。このとき、母数の事前確率法則を与えることは難しい問題であるが、今後検討していきたいと考えている。

1) 荒木、寒川、渡辺：確率分布の母数の不確定性評価法、59年度中部支部研究発表会講演集、1985。