

1. 概説 我が国では、岩井法としてよく知られているクオントイル (quantile) 法が、対数正規分布の母数推定に広範に用いられている。同等な手法を Wilson-Hilferty 変換を利用して、ガンマ分布族、すなわち、ピアソン3型 (P3) 分布と対数ピアソン3型 (LP3) 分布の母数推定に適用可能である。本報告では、P3分布を例にとり、モンテカルロ法により、確率水文量推定精度をクオントイル法と既往の母数推定法と比較検討する。

2. 基礎理論 正の歪度を持つピアソン3型 (P3) 分布の密度関数は (1) 式で与えられる。ここで、 a, b, c は分布母数で、 $\Gamma(b)$ はガンマ関数である。P3分布の平均値 (μ)、分散 (σ^2)、歪度 (γ) は (2) 式で与えられる。標準ガンマ変量算定に (3) 式で示される Wilson-Hilferty 変換式が多用されている。ここで、 w_p と t_p はそれぞれ、確率レベル p に対応する標準ガンマ変量と標準正規変量である。したがって、P3分布に従う変量、 x_p は (4) 式で近似できる。標本値がP3分布に従うとして、そのメディアン、 p -クオントイル、 $(1-p)$ -クオントイルをそれぞれ、 x_m 、 x_p 、 x_{1-p} とすると、(4) 式から (5) 式が成立する。標準正規変量は $t_m = 0$ 、 $t_{1-p} = -t_p$ の特性を有することから、(5) 式は (6) 式に変換される。すなわち、P3分布の位置母数 c は他の母数に依存することなく (6) 式から推定可能となる。なお、実際の適用にあたっては、 x_m 、 x_p 、 x_{1-p} の値として、岩井法と同様に、標本のメディアン、最小値、最大値を採用すればよい。(6) 式を c について解くと、(7) 式が得られる。(7) 式の2根のうち、1根は標本最小値より小さく、しかも原式 (6) 式を満足しなければならない。他の分布母数 a, b の推定には最尤法と積率法を併用することが考えられる。最尤法による母数 a と b の推定式を (8) 式に、積率法併用による推定式を (9) 式に示す。なお、 x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) は標本値であり、 N は標本数である。

Table 1 Summary of Equations

$$f(x; a, b, c) = [(x-c)/a]^{b-1} \exp[-(x-c)/a] [a\Gamma(b)]^{-1} \dots (1)$$

$$\mu = ab + c; \sigma^2 = a^2b; \gamma = 2/b^{1/2} \dots (2)$$

$$w_p = b(1 - 1/9b + t_p/3\sqrt{b})^3 \dots (3)$$

$$x_p = c + ab(1 - 1/9b + t_p/3\sqrt{b})^3 \dots (4)$$

$$\begin{cases} x_m = c + ab(1 - 1/9b + t_m/3\sqrt{b})^3 \\ x_p = c + ab(1 - 1/9b + t_p/3\sqrt{b})^3 \\ x_{1-p} = c + ab(1 - 1/9b + t_{1-p}/3\sqrt{b})^3 \end{cases} \dots (5)$$

$$2(x_m - c)^{1/3} = (x_{1-p} - c)^{1/3} + (x_p - c)^{1/3} \dots (6)$$

$$c = \frac{\{[G_1 - 3E^2/4] \pm \sqrt{[G_1 - 3E^2/4]^2 - 4[G_2 - 3E/2][G_3 - E^3/8]}\}}{2[G_2 - 3E/2]} \dots (7)$$

$$\text{where}$$

$$G_1 = x_m x_{1-p} + x_{1-p} x_p + x_p x_m$$

$$G_2 = x_m + x_{1-p} + x_p; G_3 = x_m x_{1-p} x_p$$

$$3E = 8x_m - x_{1-p} - x_p$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - c)^{-1}}{\sum_{i=1}^N (x_i - c)^{-1} - N^2 / \sum_{i=1}^N (x_i - c)} \dots (8)$$

$$ab = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - c)/N}{\dots}$$

$$a = s_x^2 / (\bar{x} - c); b = (\bar{x} - c)^2 / s_x^2 \dots (9)$$

$$\text{where}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i / N; s_x^2 = \frac{N}{N-1} s_1^2; s_1^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 / N$$

$$b = (2/C_{x2})^2; a = s_x / b^{1/2}; c = \bar{x} - s_x b^{1/2} \dots (10)$$

$$b = (2/C_{x3})^2; a = s_x / b^{1/2}; c = \bar{x} - s_x b^{1/2} \dots (11)$$

$$\text{where}$$

$$C_{x2} = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2} S_k; C_{x3} = S_k (A + B S_k^2); \dots (12)$$

$$S_k = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3 / [N s_1^3]}{\dots}$$

$$\text{rmse}^2(\hat{x}_p) = [x_p - E(\hat{x}_p)]^2 + E\{[\hat{x}_p - E(\hat{x}_p)]^2\} \dots (13)$$

3. 適用例 確率分布の母数推定法として、多くは積率法が簡便さのため広範に用いられている。P3分布においても、(2) 式の母積率を標本特性値で置換えて母数が推定される。このとき、一番問題となるのが標本歪度 (S_k) の偏り補正である。(12) 式の C_{x2} は確率分布形によらない補正歪度であり、 C_{x3} は Bobée-Robitaille¹⁾ によって提案された P3 分布の歪度補正式である。なお、係数 A と B は標本数 N のみの関数である。 C_{x2} と C_{x3} を用いた積

率法による P3分布の母数推定式がそれぞれ、
(10) 式と (11) 式で与えられる。

以下には、上述した 4種の母数推定法による
確率水文量推定精度をモンテカルロ法により
比較検討した一例を示す。 計算手順を簡単
に述べると、

(1) 母集団が 2母数-ガンマ (P2) 分布に従
がうものとする。 すなわち、位置母数が c
= 0 の場合である。 このとき、変動係数
 C_v と歪度 γ の間に $\gamma = 2C_v$ が成立するの
で、本報告では、 $C_v = 0.25, 0.5, 1.0$ と
選定してある。 なお、母平均 μ はすべての
数値実験で $\mu = 1.0$ とした。

(2) P2分布に従がう乱数を修正 Kirby法 で
発生させる。 このとき、標本数を $N = 20$
と 40 の 2ケースとした。

(3) 模擬発生させたデータ系列に P3分布を
あてはめ、3母数を 4手法により推定した。
このとき、(10) 式による積率法を Method 1、
(11) 式を用いた積率法を Method 2、(7)、
(8) 式によるクオンタイル-最尤法を
Method 3、(7)、(9) 式を用いたクオンタイ
ル-積率法を Method 4 と便宜上呼ぶことに
する。

(4) 各々の母数推定法につき、確率レベル
 $p = 0.01, 0.1, 0.50, 0.90, 0.99, 0.998$
に対応する水文量推定値 $\hat{x}_p$ を求める。

(5) ステップ (2) ~ (4) を繰り返し適
用して、 $\hat{x}_p$ の標本値を 2500 個発生させ、
 $\hat{x}_p$ の root mean square error (rmse) を

(13) 式で計算する。 ここで、 x_p は P2分布の p -クオンタイルの真値である。

表-2と表-3はそれぞれ、数値実験結果を標本数、 $N = 20$ と 40 につき、 $\text{rmse}(\hat{x}_p)/x_p$ の値で
比較したものである。 $C_v = 0.25$ のときは、biased skew を用いた Method 1 がすべての p -クオン
タイルの推定値において一番精度がよい。 C_v が大きくなっても、Method 2、すなわち、P3分布の
歪度補正式を用いた $\hat{x}_p$ に及ぼす効果は顕著にはみられない。 Method 3 と Method 4 のperformance
は C_v, p の値に関係なくほぼ同程度である。 この 2つの手法は Methods 1 と 2 に比べて、 C_v が
大で、小さい確率レベルに対する水文量推定にとくに有効である。 $C_v = 1.0$ では、Method 3 (クオ
ンタイル-最尤法) が最小の rmse 値をとっていることがわかる。

本報告で提案した P3分布に関する母数推定法としてのクオンタイル法は対数ピアソン3型分布にも拡張
可能である。 クオンタイル法による母数推定式も積率法と同様平易で実用面での適用が期待できる。

参考文献

- 1) Bobée, B. and Robitaille, R. : Correction of bias in the estimation of the coefficient of skewness, Water Resources Research, 11(6), pp.851-854, 1975.
- 2) Hoshi, K. and Burges, S.J. : Approximate estimation of the derivative of a standard gamma quantile for use in confidence interval estimates, Journal of Hydrology, 53, pp.317-325, 1981.

Table 2 Ratios of the root mean square error of various quantile estimators to the true quantile with $N = 20$

Fitting method	$\text{rmse}(\hat{x}_p)/x_p$					
	P	0.01	0.10	0.50	0.90	0.998
$C_v = 0.25$:						
Method 1		0.1877	0.0905	0.0602	0.0701	0.1315
Method 2		0.2503	0.0981	0.0636	0.0696	0.1731
Method 3		0.2113	0.0925	0.0611	0.0705	0.1486
Method 4		0.2126	0.0925	0.0609	0.0701	0.1447
$C_v = 0.5$:						
Method 1		0.7903	0.2228	0.1251	0.1279	0.1796
Method 2		1.0137	0.2653	0.1305	0.1262	0.2022
Method 3		0.6715	0.2189	0.1216	0.1276	0.1795
Method 4		0.6791	0.2191	0.1217	0.1275	0.1797
$C_v = 1.0$:						
Method 1		39.8288	1.2686	0.3597	0.2304	0.2946
Method 2		29.9752	1.6646	0.3178	0.2287	0.2895
Method 3		10.9595	0.8411	0.3077	0.2251	0.2652
Method 4		11.2597	0.8428	0.3005	0.2291	0.2722

Table 3 Ratios of the root mean square error of various quantile estimators to the true quantile with $N = 40$

Fitting method	$\text{rmse}(\hat{x}_p)/x_p$					
	P	0.01	0.10	0.50	0.90	0.998
$C_v = 0.25$:						
Method 1		0.1382	0.0635	0.0438	0.0492	0.0753
Method 2		0.1628	0.0653	0.0454	0.0491	0.0830
Method 3		0.1425	0.0640	0.0446	0.0497	0.0824
Method 4		0.1451	0.0638	0.0441	0.0492	0.0777
$C_v = 0.5$:						
Method 1		0.6507	0.1572	0.0914	0.0932	0.1437
Method 2		0.7490	0.1755	0.0939	0.0923	0.1544
Method 3		0.4609	0.1492	0.0881	0.0947	0.1431
Method 4		0.4733	0.1489	0.0872	0.0933	0.1365
$C_v = 1.0$:						
Method 1		33.1527	1.0329	0.2630	0.1614	0.2224
Method 2		25.1449	1.0938	0.2351	0.1614	0.2134
Method 3		5.1509	0.4882	0.2105	0.1589	0.1896
Method 4		5.2036	0.5405	0.2101	0.1611	0.1950