

室蘭工業大学 学生員 菅田 紀之

室蘭工業大学 正 員 松岡 健一

日 本 大 学 正 員 能町 純雄

1. はじめに 弾性定数の異なる円柱と円筒によって形成される二層同心円柱を弾性波が柱軸方向に進行する場合の伝播速度を知ることが、興味のある問題である。既に著者らは、軸対称波動について3次元弾性理論により解析したが²⁾、ここでは曲げ波動について位相速度分散曲線と波動モードを求め検討を加えた。

2. 基礎変位式 円筒の半径方向に r 、円周方向に θ 、円筒軸方向に z をとり、波動は軸方向に進行する定常波動伝播と仮定し、 p を角速度、 V を波動伝播速度、 μ , λ を L a m e の弾性定数、 ρ を円筒の密度とし、半径方向に H a n k e l 変換を行うと変位式は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} u &= (\bar{A}_{mr} + \bar{B}_{mr}) \cos m\theta \exp i p(t - \frac{z}{V}) & v &= (\bar{A}_{mr} + \bar{B}_{mr}) \sin m\theta \exp i p(t - \frac{z}{V}) & w &= \bar{w}_m \cos m\theta \exp i p(t - \frac{z}{V}) \\ \bar{A}_{mr} &= \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{1}{N_k} \chi_{mp}^{(k)}(N_k r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} + (m+1) A_{mk} + (m-1) B_{mk} + i \frac{N}{2} E_{mk} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{1}{N_k} \chi_{mp}^{(k)}(N_k r) - \frac{N_k}{N^2} \chi_{mp}^{(k)}(N_k r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} - i N E_{mk} \right\} \right\} \\ \bar{B}_{mr} &= \sum_{k=1}^2 \left\{ -\frac{1}{N_k} \chi_{ms}^{(k)}(N_k r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} + (m+1) A_{mk} + (m-1) B_{mk} - i \frac{N}{2} E_{mk} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{1}{N_k} \chi_{ms}^{(k)}(N_k r) - \frac{N_k}{N^2} \chi_{ms}^{(k)}(N_k r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} - i N E_{mk} \right\} \right\} \\ \bar{w}_m &= \sum_{k=1}^2 \left\{ G_m^{(k)}(N_k r) E_{mk} + i \frac{2\mu N}{\rho p^2} \left\{ G_m^{(k)}(N_k r) - G_m^{(k)}(N_k r) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} - i N E_{mk} \right\} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$N = p/V \quad N_k^2 = N^2 - \rho p^2/\mu \quad N_\alpha^2 = N^2 - \rho p^2/(2\mu + \lambda)$$

ここで、 m は波動の周方向の性質を示し、0 のときは軸対称で 1 のときは曲げ波動となる。また、関数 G と χ は円筒の外半径を a_1 、内半径を a_2 とすると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m,\alpha}^{(k)}(Nr)}{R_{m,\alpha}^{(k)}(Na_k)} & \chi_{mp}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m,\alpha}^{(k)}(Nr)}{R_{m,\alpha}^{(k)}(Na_k)} & \chi_{ms}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m,\alpha}^{(k)}(Nr)}{R_{m,\alpha}^{(k)}(Na_k)} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

$$R_{j,\alpha}^{(k)}(Nr) = I_j(Nr) K_m(Na_{k-1}) - (-1)^j I_m(Na_{k-1}) K_j(Nr) \quad a_0 = a_2, \quad j = m-1, m, m+1$$

ただし、 I , K は変形第 1 種、第 2 種の B e s s e l 関数である。又、式中の係数 α , β , A , B , E は円筒の内外面の変位及び応力で与えられるもので、次のようになる。

$$\alpha_{mk} = \tilde{r}_{r=a_k} / r_{a_k}, \quad \beta_{mk} = \tilde{r}_{r=a_k} / r_{a_k}, \quad A_{mk} = \tilde{A}_{mr} / a_k, \quad B_{mk} = \tilde{B}_{mr} / a_k, \quad E_{mk} = \tilde{w}_m / r_{a_k} \quad \dots (3)$$

以上が円筒に対する変位式であるが、円柱の場合は、 $a_2 = 0$ として $k = 1$ の項のみ考慮することで与えられる。この場合、関数 R は次のように表される。

$$R_{j,\alpha}^{(1)}(Nr) = I_j(Nr) \quad \dots (4)$$

3. 固有値方程式 二層同心円柱を伝わる弾性波の速度は、2. で求めた変位式を円筒と円柱の境界条件を満足するように導いた、固有値方程式の固有値問題として与えられる。いま、円筒に対して添字 1、円柱に対して添字 2 で示すと、2. で求めた解に対して、まず次の適合条件式を満足しなければならない。

$$\bar{A}_{m,r-1} r_{a_k} = a_k \bar{A}_{m,k-1}, \quad \bar{B}_{m,r-1} r_{a_k} = a_k \bar{B}_{m,k-1}, \quad \bar{A}_{m,r-2} r_{a_2} = a_2 \bar{A}_{m,1-2}, \quad \bar{B}_{m,r-2} r_{a_2} = a_2 \bar{B}_{m,1-2} \quad \dots (5)$$

さらに、円筒の内外面における境界条件を考えると次のようになる。

$$\sigma_{r-1} r_{a_2} = 0, \quad \beta_{m,1-1} = 0 \quad \dots (6) \quad \tau_{r\theta-1} r_{a_2} = 0, \quad \alpha_{m,1-1} = 0 \quad \dots (7) \quad \tau_{rz-1} r_{a_2} = 0 \quad \dots (8)$$

$$u_1 r_{a_2} = u_2 r_{a_2}, \quad v_1 r_{a_2} = v_2 r_{a_2}, \quad A_{m,2-1} = A_{m,1-2}, \quad B_{m,2-1} = B_{m,1-2} \quad \dots (9)$$

$$w_1 r_{a_2} = w_2 r_{a_2}, \quad E_{m,2-1} = E_{m,1-2} \quad \dots (10) \quad \sigma_{r-1} r_{a_2} = \sigma_{r-2} r_{a_2}, \quad \beta_{m,2-1} = \beta_{m,1-2} \quad \dots (11)$$

$$\tau_{r\theta-1} r_{a_2} = \tau_{r\theta-2} r_{a_2}, \quad \alpha_{m,2-1} = \alpha_{m,1-2} \quad \dots (12) \quad \tau_{rz-1} r_{a_2} = \tau_{rz-2} r_{a_2}, \quad \dots (13)$$

これらの式(5)、(8)、(13)による固有値方程式の根として位相速度が求まる。

4. 数値解析 解析は曲げ波動について行った。計算例としてはCase I : ポアソン比 $\nu_1 = 1/6$ 、 $\nu_2 = 0.3$ 、弾性係数比 $E_2/E_1 = 7.0$ 、密度比 $\rho_2/\rho_1 = 3.2$ 。Case II : $\nu_1 = 0.3$ 、 $\nu_2 = 1/6$ 、 $E_1/E_2 = 7.0$ 、 $\rho_1/\rho_2 = 3.2$ について、 $a_2/a_1 = 0.0, 0.25, 0.5, 0.9, 1.0$ の場合について行った。

図-1はCase Iについて1次の位相速度分散曲線を示したものである。図は縦軸に円筒のせん断波の速度と位相速度との比をとり、横軸には波長と外半径との比をとっている。波長が0の場合には円筒のRayleigh波の速度に一致し、無限大では0になることがわかる。

図-2はCase IIについて1次の位相速度分散曲線を示したものである。縦軸には円柱のせん断波の速度と位相速度との比をとっている。波長が0の場合には円柱のせん断波の速度に一致し、無限大では円筒の位相速度に漸近しながら0になっている。又、 $a_2/a_1 = 0.9$ のときだけ $1/a_1$ が0.4付近で極小値をもつことがわかる。

図-3はCase Iについて2次の位相速度分散曲線を示したものである。波長が0の場合には円筒のせん断波の速度に一致し、無限大では位相速度も無限大になることがわかる。

図-4はCase IIについて2次の位相速度分散曲線を示したもので、Case Iと同じような性質を示しているが、 $1/a_1 = 0.0 \sim 0.4$ において特異な曲線となっていることがわかる。

図-5は軸方向変位 w の1次の波動モードである。Case I, IIともに波長が長いときには静的な曲げと同じように変位しているが、波長が短くなると変位は、一時表面と境界に集中する傾向を示すが、最終的には表面にのみ集中してくる。Case IIにおいて波長が短いとき変位が表面に集中しているのに位相速度が円柱のせん断波の速度になっていることが示されているが、これは半無限体でのLove波の性質に似ている。なお詳しいことについては今後、検討を進めたい。

図-1はCase Iについて1次の位相速度分散曲線を示したものである。図は縦軸に円筒のせん断波の速度と位相速度との比をとり、横軸には波長と外半径との比をとっている。波長が0の場合には円筒のRayleigh波の速度に一致し、無限大では0になることがわかる。

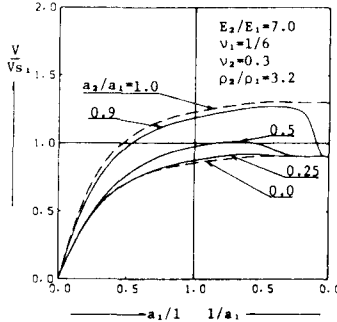


図-1 1次の位相速度分散曲線 (Case I)

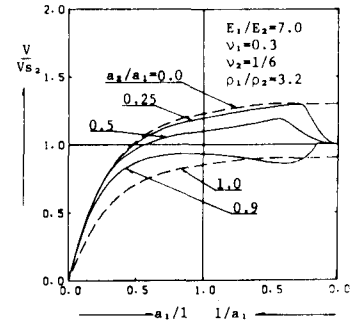


図-2 1次の位相速度分散曲線 (Case II)

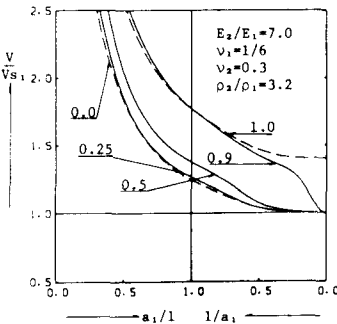


図-3 2次の位相速度分散曲線 (Case I)

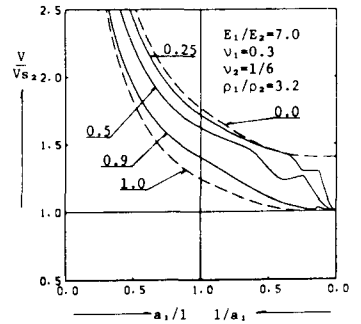
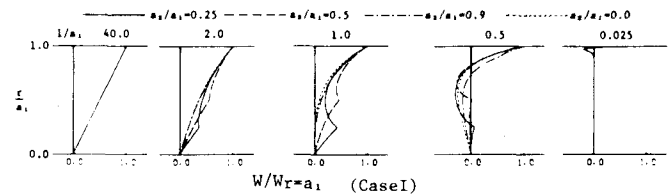
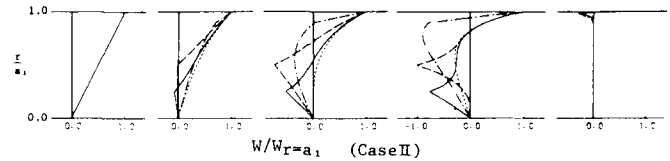


図-4 2次の位相速度分散曲線 (Case II)



W/Wr=a1 (Case I)



W/Wr=a1 (Case II)

- ※参考文献 1) 能町純雄、松岡健一、坂下正幸：弾性体中にある厚肉円筒を伝わる弾性波について、土木学会論文報告集、第293号、pp. 1~8、1980
2) 菅田紀之、松岡健一、岸徳光、能町純雄：二層同心円柱を伝わる弾性波の位相速度について、土木学会北海道支部論文報告集、第41号、pp. 73~76、1985