

武蔵工業大学 正会員 星谷 勝

武蔵工業大学 学生員 丸山 収

1. 目的

ある結果をいくつかの説明要因の関係式として、実験的に求めたいときには重回帰分析^{1,2}法が用いられる。結果を Y 、要因を $X_i: i=1, 2, \dots, m$ として

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m \quad (1)$$

とおく。未知係数 a_i は n 組の実験データ、 $Y_k, X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{mk}; (k=1, 2, \dots, n)$ を用いて、実験値と推定値の自乗誤差 $\sum_{k=1}^n (Y_k - \hat{Y}_k)^2$ を最小にするように決定される。この方法の特徴は(1)式からわかる様に、因果関係が線形であることである。あるいは例え非線形であっても、なんらかの方法で(1)式の関係に変換できることが前提である。また、未知係数 a_i の決定は n 組のデータを用いた batch 処理でなされる。一旦実験式が求まると、これを法則として使用することになるがその後新たにデータが蓄積されると、今までのデータと合わせて再び batch 処理を行い実験式を改善することになる。

本研究はこのような batch 処理に基づく、いわば固定型重回帰分析の代わりに拡張カルマンフィルタ³を用いれば、sequential 処理による適応型重回帰分析が可能となることを示したものである。このような方法によれば、新しくデータが得られたときには、いままでのデータに拘ることなく順次実験式が改善されていくであろう。近年、データバンクが注目され、各事業所でデータの蓄積がなされており、こうした適応型の重回帰分析法は有効な手法であると思われる。

2. 拡張カルマンフィルタへの定式化

batch 処理に基づく固定型重回帰分析法については、参考文献(1), (2)に委ねることとして、ここでは、拡張カルマンフィルタを用いた sequential 処理による適応型重回帰分析の定式化を行う。

(1) 式の実験データの回帰式を、一般的に表現すると(2)式となる。

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_m, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) \quad (2)$$

また、(3)式に示す n 組の実験データが与えられているとする。

拡張カルマンフィルタを用いて、未知係数 a_i を推定するためには、(2)式に示す回帰式を、状態方程式、観測方程式へと表現しアルゴリズムに組み込むことが必要である。ここで、状態量を $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ とすると、状態方程式は(4)式となる。また観測方程式

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}, X_{21}, X_{31}, \dots, X_{m1} \\ X_{12}, X_{22}, X_{32}, \dots, X_{m2} \\ \vdots \\ X_{1k}, X_{2k}, X_{3k}, \dots, X_{mk} \\ \vdots \\ X_{1n}, X_{2n}, X_{3n}, \dots, X_{mn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

は(2)式から得ることができ、その表現によっては batch 処理と、sequential 処理の使い分けができる。

(5) 式は batch 処理型、(6) 式はデータを1つずつ sequential 処理する場合の観測方程式である。その際、(2) 式の結果と要因の関係式が(1) 式の線形関係に変換されることは前提とせず、一般的な非線形関係の式に適用でき非常に汎用性があるものと思われる。

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}_{k-1} + V \quad (4)$$

状態方程式

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(X_{11}, X_{21}, \dots, X_{m1}, a_1, a_2, \dots, a_k) \\ f(X_{12}, X_{22}, \dots, X_{m2}, a_1, a_2, \dots, a_k) \\ \vdots \\ f(X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{mn}, a_1, a_2, \dots, a_k) \end{bmatrix} + W \quad (5)$$

観測方程式(batch処理)

$$\begin{bmatrix} Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{mk}, a_1, a_2, \dots, a_k) \end{bmatrix} + V \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

観測方程式(Sequential処理)

3. 数値解析例

(I). 実験式が $f(x)$ として与えられる場合、

(i) 線形重回帰分析：表-1のデータを用いて、回帰式 $Y=a_1X_1+a_2X_2+b$ に対して重回帰分析を行う。

なお、本研究では、固定型の重回帰分析（固定法）、拡張カルマンフィルターを1回のみ用いる方法（EK法）と著者らが提案している拡張カルマンフィルターアルゴリズムに重み付きグローバルな繰返しを併用した方法（EK-WGI法）の3つの手法について検討を行った。結果を表-2に示す。線形関係の回帰式の場合、任意の初期条件に対してEK法でデータを1個ずつ処理していった推定値は、固定法、EK-WGI法と一致した。

(ii) 非線形重回帰分析：例えば、回帰式が $Y=e^{a_1X_1}+a_2X_2+b$ の様に与えられた場合には、線形関係に変換することができず固定型の重回帰分析は容易にできないとされている。そこで、EK法、EK-WGI法により解析を行った。まず、 $a_1=5.0$ 、 $a_2=2.0$ 、 $b=4.0$ としてあらかじめ与え、 X_1 、 X_2 の値に対する正解値Yを求め、これをデータとして用いる（表-3）。表-4に推定結果を示す。こうした非線形回帰式の場合に、EK法による推定値は初期値の影響を強く受ける。また、データ個数の影響もあると思われる。しかし、追加されたデータを解析する際には、これまでの回帰式の係数を参考にすれば良いと思われる。EK-WGI法を用いると非常に良い精度で推定できた。

(II). 層別因子を含む場合

回帰式は $Y=aX+b$ とした。ただし、 a 、 b は層別因子の関数で、例えば j 水準あるとき $a=a_1X_1+a_2X_2+\dots+a_jX_j$ である。 X_j はダミー変数で、表-5のデータでA1水準のものであれば、 $[X_1, X_2, X_3, X_4]=[1, 0, 0, 0]$ となる。まず、水準ごとの解析結果を表-6に示す。次に、層別因子を無視して解析をした結果を表-7に示す。また、EK法による解析のパラメータ $\hat{a}$ の変動を図-1に示す。図-1より、推定値 $\hat{a}$ が、初めは初期条件の影響を受けながらも、逐次データを取り込みながら変化している過程が良くわかるものと思われる。

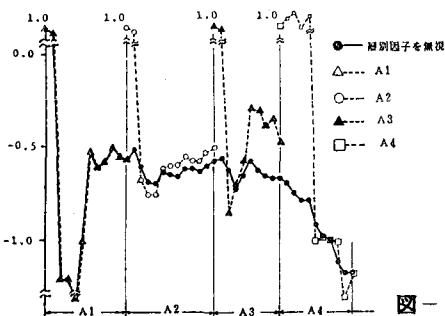


図-1. $\hat{a}$ の変動

なお、解析データ、表-1、表-2、はそれぞれ参考文献1、2より引用した。

表-1. 解析データ

no	Y	X ₁	X ₂	no.	Y	X ₁	X ₂
1	167.0	84.0	61.0	11	164.0	78.0	49.5
2	167.5	87.0	55.5	12	171.0	90.0	61.0
3	168.4	86.0	57.0	13	162.6	88.0	59.5
4	172.0	85.0	57.0	14	164.8	87.0	58.4
5	155.3	82.0	50.0	15	163.3	82.0	53.5
6	151.4	87.0	50.0	16	167.6	84.0	54.0
7	163.0	92.0	66.3	17	169.2	86.0	60.0
8	174.0	94.0	65.0	18	168.0	83.0	58.8
9	168.0	88.0	60.5	19	167.4	85.2	54.0
10	160.4	84.9	49.5	20	172.0	82.0	56.0

表-2. 推定結果

	初期値			推定値		
	a ₁	a ₂	b	a ₁	a ₂	b
固定法				-0.66	0.99	166.62
EK法	1.0	1.0	100.0	-0.66	0.98	166.46
EK-WGI法	1.0	1.0	100.0	-0.66	0.99	166.66

表-3. 解析データ

no	X ₁	X ₂	Y	no	X ₁	X ₂	Y
1	0.05	5.0	15.284	11	0.82	5.4	75.140
2	0.48	3.0	21.023	12	0.46	7.1	28.174
3	0.23	2.0	11.158	13	0.02	2.7	10.505
4	0.02	6.0	17.105	14	0.06	4.9	15.149
5	0.59	2.5	28.105	15	0.08	4.3	14.091
6	0.57	5.2	31.688	16	0.24	3.6	14.520
7	0.68	5.7	45.364	17	0.15	2.6	11.317
8	0.33	1.6	12.407	18	0.82	4.8	73.940
9	0.56	2.2	24.844	19	0.32	2.8	14.553
10	0.44	6.8	26.625	20	0.55	6.7	33.043

表-4. 推定結果

	初期値			推定値		
	a ₁	a ₂	b	a ₁	a ₂	b
EK法	1.0	1.0	1.0	5.06	0.82	10.22
	4.5	1.5	3.5	5.00	2.00	4.04
EK-WGI法	1.0	1.0	1.0	5.00	2.00	4.00

表-5. 解析データ

no	A ₁		A ₂		A ₃		A ₄	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	30	8.0	34	9.1	27	15.0	16	23.4
2	28	10.5	19	19.4	20	21.0	16	28.2
3	30	8.2	22	20.5	14	24.2	20	29.5
4	29	13.0	25	14.2	18	15.3	16	22.2
5	28	10.1	22	11.0	12	17.3	6	40.2
6	17	16.2	25	19.1	18	24.7	16	36.6
7	24	16.1	22	16.0	13	23.9	12	35.5
8	22	13.4	23	11.1	21	20.2	11	42.1
9	30	13.0	28	12.0	24	13.6	9	42.5
10	30	7.3	24	17.1			22	25.8
11	25	14.0	30	13.3				
12			24	8.9				

表-6. 推定結果

	水準	初期値		推定値	
		a	b	a	b
固定法	A ₁			-0.571	27.02
	A ₂			-0.512	27.03
	A ₃			-0.481	25.39
	A ₄			-1.190	49.74
EK法	A ₁	1.0	1.0	-0.571	27.02
	A ₂	1.0	1.0	-0.512	27.03
	A ₃	1.0	1.0	-0.481	25.39
	A ₄	1.0	1.0	-1.190	49.74
EK-WGI法	A ₁	1.0	1.0	-0.571	27.02
	A ₂	1.0	1.0	-0.512	27.03
	A ₃	1.0	1.0	-0.481	25.39
	A ₄	1.0	1.0	-1.190	49.74

表-7. 推定結果

	初期値		推定値	
	a	b	a	b
固定法			-1.188	44.62
EK法	1.0	1.0	-1.188	44.62
EK-WGI法	1.0	1.0	-1.188	44.62