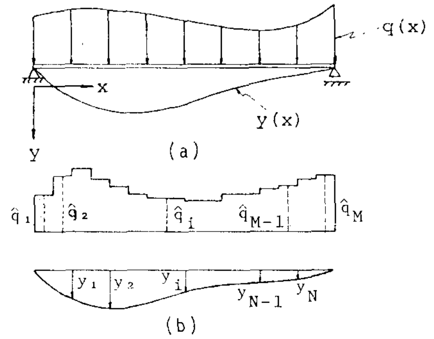
I-277　　逆解析問題とカルマンフィルタ

武蔵工業大学　正会員　星谷　勝

1．問題点

この考察では構造力学の例題を用いて議論していくが、著者が構造分野に属しているという理由にすぎず、ここでの議論の本質は社会・経済の問題も含めた、きわめて広汎な対象に適用できるものである。それが静力学的なものであろうと、ゆっくりとした経時変化を伴う現象から短周期範囲での振動問題に至る動力学なものまで含めて適用できるものである。線形または非線形、あるいは定常または非定常といった区別は重要ではない。

通常の構造力学では荷重系と構造系が与えられていて、出力として断面力やたわみが解析される。いま、たわみが構造系の何箇所かで観測されたとしよう。このとき構造系を既知として、このような変形を与える荷重系がどのような特性のものであったかを定量的に解析する命題を考えてみよう。これは通常の解析と逆向きであるので、逆解析問題という。同じ問題で、変形と荷重系を既知として残りの構造系を推定できないかという問題も考えられる。これは同定問題として知られているが、通常の流れと逆なので、やはり本質的には逆解析問題といえる。本研究では図1に示す例題を用いて、逆解析問題の本質を見定め、この解析にカルマンフィルタが有効な手法となることを示したい。（b）図のように分布荷重をM個の離散点で推定したい。最適な推定値を $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \cdots, \hat{q}_M$ として、たわみが $y_1, y_2, \cdots, y_N$ とN箇所で観測されたとすれば、両者の関係は影響係数 a_{ij} を用いて次式で与えられる。



図－1．解析モデル

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, & \cdots, a_{1M} \\ a_{21}, a_{22}, & \cdots, a_{2M} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{N1}, a_{N2}, & \cdots, a_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \vdots \\ \hat{q}_M \end{bmatrix} \qquad (1)$$

（i）N＝Mのとき；観測量 y_i が誤差を含まず、N個の点で観測されている上で、未知の荷重の $\hat{q}_i$ の個数Mと一致していれば、観測点と荷重の作用点が一致していなくても、(1)式から $\hat{q}$ を解けば荷重系が正しく推定できる。

（ii）N＜Mのとき；しかし、観測箇所数Nが未知量の個数Mより小さいときには (1)の逆算は不可能であり、いくつかの観測値が情報として得られているにもかかわらず、荷重系の推定に役立たせることができない。

（iii）N＞Mのとき；逆に、十分な量のたわみが観測され、未知量の数よりも多い場合に、逆算で荷重系を推定しようとすると、一部の観測量を有効に使用しないことになる。観測には、誤差を伴うものと考える方が自然とすれば、N個のなかから選んだ組み合わせのM個の観測量ごとに、逆算される荷重系の値は変動するであろう。

2．解析方法

前節の議論を整理してみると、観測に伴なう誤差を考慮しない決定論的力学を前提とした上で、次の問題点が残される。(1)荷重系の逆解析は y が真値のとき正しく実行されるが、誤差を伴なうと推定される荷重系は真値を与えない。(2)情報量が増加しても（Nの増加）、推定される荷重系は真値に漸近しない。むしろNが増加してMを上まわると消化不良を起して推定値が変動し、情報量が少ないときには栄養不良で推定値は不定となる。そこで、以上を解決する方法として考えられるのは、観測量に誤差が含まれるという前提

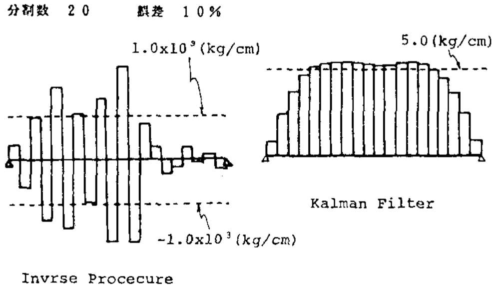
で、真値 q_iと推定値 $\hat{q}_i$ の差、すなわち推定誤差を、$E[\sum_i (q_i - \hat{q}_i)^2] \longrightarrow \min$ とした定式化であろう。問題点（2）に対しては、観測量を順次連続処理（sequential）して最適推定値を漸化的に改良できるようになっていることが好ましいことに気付くであろう。このことは、最小自乗法に基づく固定型の重回帰分析法を適応型へ変換することに他ならない。実はカルマンフィルタ(Kalman filter) は、この適応型重回帰分析のアルゴリズムなのである。参考文献は文献（1）が最良と思うが、このアルゴリズムを用いるときに、安定かつ精度のよい推定を行なう手段として文献（2）で著者らはＥＫ－ＷＧＩ法を開発している。

3．決定論的逆解析とカルマンフィルタによる逆解析

カルマンフィルタを組み込んだＥＫ－ＷＧＩ法を適用するためには対象系を状態方程式と観測方程式に表現することが必要である。この表現法には幾通りも考えられるので、問題に応じた表現が肝要で少しばかりの独創性が必要となる。はりの問題に戻れば、基本式を式（1）で表したが、たとえばこれを観測方程式として用い、荷重系は定常性を有することを考えて状態方程式を作成してみれば、

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ \vdots \\ q_M(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k-1) \\ q_2(k-1) \\ \vdots \\ q_M(k-1) \end{bmatrix} + v \quad \text{(a)} \\
&y(k) = [a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kM}] \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ \vdots \\ q_M(k) \end{bmatrix} + w \quad \text{(b)}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

（a） 状態方程式
（b） 観測方程式

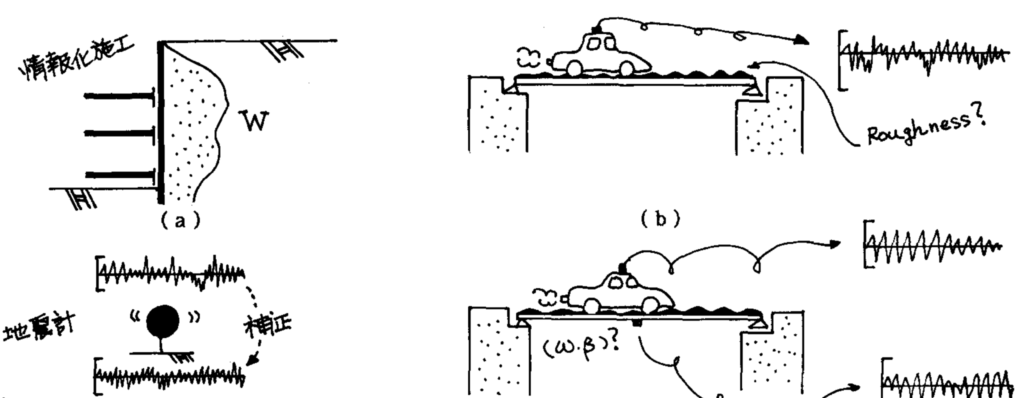


図－2．解析結果

観測量 $y(k); k=1,2,\cdots,N$ を順次取り込んで、ＥＫ－ＷＧＩ法で処理すれば、状態ベクトルの要素q_iの最適推定値$\hat{q}_i$が漸化的に算出される。図2は等分布荷重の逆解析を2つの方法（それぞれ式（1）と（2））で行なって、結果を対比したものである。観測データが誤差で乱されいるとき、決定論的手法では$q=5.0$(kg/cm)を推定することは不可能である。

4．応用の可能性

いろいろな応用が考えられるが、その一部を紹介する。図3（a）は山留めの背面土圧分布の推定で、情報化施工に有用である。（b）地震加速度記録の計器補正と変換システム、（c）は舗装面荒さの推定法である。（d）は走行車の上下動と橋の振動を同時観測して、走行車と橋の両方の特性値を推定するものである。



図－3．応用例

参考文献

(1) A.H.Jazwinski,Stochastic Processes and Filtering Theory,Academic Press,1970

(2) M.Hoshiya and E.Saito,Structural Identification by Extended Kalman Filter,Jour.of Eng.Mech. ASCE,Vol.110,No.12,Dec.,1984