

武蔵工業大学 正会員 星谷 勝

武蔵工業大学 学生員 丸山 収

武蔵工業大学 学生員 栗田 博昭

1. はじめに

構造物に対する入力とその応答の観測データを用いて動特性値（固有円振動数、減衰定数、刺激係数）を推定する手法として著者らは、拡張カルマンフィルタアルゴリズムに重み付きグローバルな繰返しを併用したEK-WGI²法を提案している。EK-WGI法を、構造物の動特性推定に応用するには、問題に応じて、いかに効率良く、その運動方程式を拡張カルマンフィルタアルゴリズム中の状態方程式、観測方程式へと定式化するかが重要である。既に、線形多自由度系でモデル化された構造物をモーダル解析法の特徴を生かして表現し、状態方程式等を線形加速度法などの数値積分により定式化することの有効性を示している（方法-1）³。

ここでは、(i) 方法-2：構造物の時間領域の応答に対する離散型漸化式を誘導し、それを状態方程式、観測方程式へ定式化する方法、(ii) 方法-3：周波数領域の応答を観測データとして、周波数応答関数を状態方程式、観測方程式へと定式化する方法について述べる。

2. 離散型漸化式による定式化（方法-2）

(i) 離散型漸化式の誘導：線形多自由度系でモデル化された構造物の*i*質点での運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} (a) \quad & \ddot{\xi}_{ik}(t) + 2\beta_k \omega_k \dot{\xi}_{ik}(t) + \omega_k^2 \xi_{ik}(t) = -P_{ik} \ddot{f}(t) \\ (b) \quad & \xi_{ik}(t) = \sum_k \xi_{ik}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 β_k : *k*次振動モードの減衰定数、 ω_k : *k*次の固有円振動数、 P_{ik} : *i*質点の*k*次の刺激定数

次に(1-a)式をラプラス変換すると、例えば変位応答の伝達関数は次の(2)式となる。さらに、

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s^2 + 2\beta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (2) \\ H(s) &= \frac{1}{2i\bar{\omega}} \left[\frac{1}{s + (a - i\bar{\omega})} - \frac{1}{s + (a + i\bar{\omega})} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

ここで $a = \beta_k \omega_k$, $\bar{\omega} = \sqrt{1 - \beta_k^2} \cdot \omega_k$

(4)式に示すラプラス変換とZ変換の関係式⁴から、Z変換域での伝達関数は(5)式で与えられる。

$$\begin{aligned} H(s) = \sum_j \frac{A_j}{s + s_j} \rightarrow H(Z) = \sum_j \frac{1}{1 - e^{s_j \Delta} Z^{-1}} \quad (4) \\ H(Z) = \frac{\frac{e^{-a\Delta}}{\bar{\omega}} \sin(\bar{\omega}\Delta)}{1 - 2e^{-a\Delta} \cos(\bar{\omega}\Delta) Z^{-1} + e^{-2a\Delta} Z^{-2}} \quad (5) \end{aligned}$$

(Δ: 時間刻み)

よって、変位応答の離散型漸化式が得られる。同様に、速度、加速度応答に対しても次のようになる。⁵

$$(\text{変位}) \quad \xi_{ik}(M) = 2e^{-a\Delta} \cos(\bar{\omega}\Delta) \xi_{ik}(M-1) - e^{-2a\Delta} \xi_{ik}(M-2) - \frac{P_{ik}}{\bar{\omega}} e^{-a\Delta} \sin(\bar{\omega}\Delta) \ddot{f}(M-1) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (\text{速度}) \quad \dot{\xi}_{ik}(M) &= 2e^{-a\Delta} \cos(\bar{\omega}\Delta) \dot{\xi}_{ik}(M-1) - e^{-2a\Delta} \dot{\xi}_{ik}(M-2) \\ &\quad - P_{ik} \ddot{f}(M) + e^{-a\Delta} \left[\cos(\bar{\omega}\Delta) + \frac{\beta_k}{\bar{\omega}} \sin(\bar{\omega}\Delta) \right] P_{ik} \ddot{f}(M-1) \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{加速度}) \quad \ddot{\xi}_{ik}(M) &= 2e^{-a\Delta} \cos(\bar{\omega}\Delta) \ddot{\xi}_{ik}(M-1) - e^{-2a\Delta} \ddot{\xi}_{ik}(M-2) \\ &\quad - (2a-1) \ddot{f}(M) - e^{-a\Delta} \left[2(a-1) \cos(\bar{\omega}\Delta) - \frac{\omega_{ik}(1-2\beta_k^2)}{\bar{\omega}} \sin(\bar{\omega}\Delta) \right] \ddot{f}(M-1) - e^{-2a\Delta} \ddot{f}(M-2) \quad (8) \end{aligned}$$

(ii) 状態方程式、観測方程式の定式化：*k*次振動モードの状態量を、 $X_1 = \beta_k$, $X_2 = \omega_k$, $X_3 = P_{ik}$ とおくと状態推定ベクトルは、 $X = [X_1, X_2, X_3]^T$ となる。それぞれ(6)～(8)式を状態量で置きかえることで、容易に非線形離散型観測方程式が得られる。変位応答1波のみを観測データとした場合の定式化を

以下に示す。

$$\begin{bmatrix} X_1(M) \\ X_2(M) \\ X_3(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(M-1) \\ X_2(M-1) \\ X_3(M-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{X_3 e^{-a} \sin(\Delta\omega)}{\omega} \ddot{f}(M-1) \end{bmatrix} \quad \text{状態方程式} \quad (9)$$

$$\xi_{ik}(M) = \begin{bmatrix} 2e^{-a} \cos(\Delta\omega) \xi_{ik}(M-1) - e^{-2a} \xi_{ik}(M-2) \\ -\frac{X_3 e^{-a}}{\omega} \sin(\Delta\omega) \ddot{f}(M-1) \end{bmatrix} \quad \text{観測方程式} \quad (10)$$

$$(a = X_1 X_2 \Delta, \omega = \sqrt{1 - X_1^2 X_2^2})$$

方法1に比べ簡単な定式化となっており、計算に要する時間が短縮されるものと思われる。容易に多自由度系に拡張できる。なお、非線形性を状態方程式にもたせる定式化も可能である。

3. 周波数領域の観測データを用いる場合の定式化 (方法-3)

(i) 状態方程式、観測方程式の定式化: (1) 式をフーリエ変換すると次式を得る。

$$\text{(変位)} \quad \bar{\xi}_{ik}(\omega) = \frac{-P_{ik} \bar{f}(\omega)}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\beta_k \omega_k \omega} \quad \text{(速度)} \quad \bar{\dot{\xi}}_{ik}(\omega) = i\omega \bar{\xi}_{ik}(\omega) \quad \text{(加速度)} \quad \bar{\ddot{\xi}}_{ik}(\omega) = (i\omega)^2 \bar{\xi}_{ik}(\omega) \quad (11)$$

周波数領域のデータが時間領域のものと対等な情報を持つためには、その実数部 ($\text{Re}[\cdot]$) と虚数部 ($\text{Im}[\cdot]$) が別々にわかっていなければならない。例えば、変位応答のフーリエ変換では次のようになる。

$$\text{Re}[\bar{\xi}_{ik}(\omega)] = \frac{-P_{ik}(\omega_k^2 - \omega^2) \text{Re}[\bar{f}(\omega)] - 2P_{ik}\beta_k \omega_k \omega \text{Im}[\bar{f}(\omega)]}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + (2\beta_k \omega_k \omega)^2} \quad (12)$$

$$\text{Im}[\bar{\xi}_{ik}(\omega)] = \frac{2P_{ik}\beta_k \omega_k \omega \text{Re}[\bar{f}(\omega)] - P_{ik}(\omega_k^2 - \omega^2) \text{Im}[\bar{f}(\omega)]}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + (2\beta_k \omega_k \omega)^2} \quad (13)$$

方法3においても、非線形性を状態方程式または観測方程式のいずれかに持たせる2通りの定式化が考えられる。ここでは、観測方程式を非線形とする場合について述べる。まず、 k 次振動モードの状態量を、 $X_1 = \beta_k$, $X_2 = \omega_k$, $X_3 = P_{ik}$ とおくと状態方程式は (9) 式で与えられる。そして、(12) (13) 式を状態量で表すことで非線形離散型観測方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \text{Re}[\xi_{ik}(M)] \\ \text{Im}[\xi_{ik}(M)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (12) \text{ 式} \\ (13) \text{ 式} \end{bmatrix} + W \quad (14)$$

$$(M = m \cdot \Delta\omega, m = 0, 1, 2, \dots)$$

また、(11) 式の関係から速度、加速度応答に対しても定式化は容易に行える。

一般に振動試験からは、時間領域のデータが観測される。よって、時間領域での解析手法が妥当であると思われる (方法1, 2)。しかし、周波数領域に変換することで重要なのは、振動数成分が検出されることである。したがって、方法3ではスムージングなどの処理をしていない応答スペクトルの、ある特定の周波数帯域についてのみ解析が可能である (図-1)。

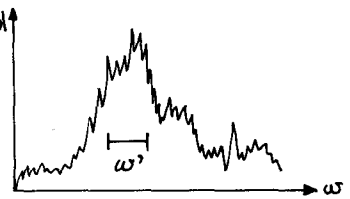


図-1. 応答スペクトル

スペクトル解析法とEK-WGI法の特徴を合わせ持った解析法であると思われる。周波数領域にデータを変換する際にNyquist振動数などの問題があるが、データを時間刻みごとに解析する方法に比べ効果的な方法であろう。

4. おわりに

EK-WGI法による構造物の動特性推定に関して、新たに方法2、方法3について述べた。解析に際しては、方法1を含めそれぞれの特徴を考え最適な手法を選択、併用していくことが必要であると思われる。

なお、数値解析例については講演の際に示すこととする。

参考文献: 1. Jazwinski A.H.: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press 1970

2. M. Hoshiya and E. Saito, Structural Identification by Extended Kalman Filter, Jour. of

Eng. Mech., ASCE, Vol. 110, No. 12, Dec., 1984

3. 線形多自由度系の動特性推定 土橋集 No. 344/1-1

4. University, "Kiril and Metodij" Skopje-Yugoslavia, Publication No. 60

5. J.L. Beck and H. Park Optimal Algorithms ~

Eighth World conference on Earthquake Engineering Volume