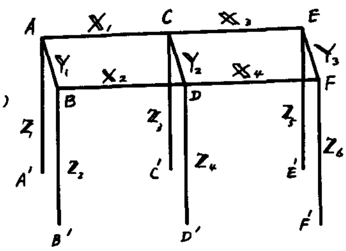
I-274　立体ラーメンの内部粘性減衰強制振動

信州大学　正員○夏目正太郎
信州大学　正員　石川清志

§1. まえがき　骨組構造物全体の挙動は、各部材の棒としての挙動の集積である。今、速度に比例する部材内部減衰を考慮すると、棒の挙動をあらわす微分方程式は



$$\left.\begin{array}{ll}\text{たて振動}: & \dfrac{EA}{L^2}\left(1+\varepsilon_u\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}-\dfrac{\gamma A}{g}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(Q_u \sin pt)\\ \text{ねじり振動}: & \dfrac{GJ}{L^2}\left(1+\varepsilon_\phi\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2}-\dfrac{\gamma A j^2}{g}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=(Q_\phi \sin pt)\\ \text{たわみ振動}: & \dfrac{EI}{L^4}\left(1+\varepsilon_w\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\dfrac{\partial^4 w}{\partial \rho^4}+\dfrac{\gamma A}{g}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(Q_w \sin pt)\end{array}\right\} \quad (1)$$

であり、これらの解は、斉次解と特解との和からなるものとし、たわみ振動は2方向のたわみが考えられる。強制振動解析を固有マトリクス法で扱うときは、斉次解も特解も (1) における外力作用を示す右辺を除いた型の微分方程式を解き、特解の中に外力を導入するために、荷重マトリクスを計算して必要に応じて、固有マトリクスに加えて状態量を算出することになる。

$$\text{斉次解状態量}:\ W_h(\rho)=D_h R_h(\rho) N_h e^{i\omega t}, \qquad \text{特解状態量}:\ W_p(\rho)=D_p R_p(\rho)[N_p+\langle K\rangle]\sin pt \qquad (2)$$

D：物理的係数マトリクス，$R(\rho)$：座標特性マトリクス，N：固有マトリクス，K：荷重マトリクス．

固有マトリクス法で強制振動を解く場合には、第1に、斉次解を用いて自由振動の固有値を求め、それが定った時点で未定定数群を1つの未定定数で示す、いわゆる比の値として表現しうるようにする。第2は、特解を用いて外力と境界条件により、未定定数すなわち固有マトリクスを既知の型にする。これにより、任意点、任意時刻における状態量を算定出来る。第3の手順としては、第1にて未定定数としてまだ1つ残されたものを既知にする必要がある。これに初期条件が導入されるのであるが、第2の手順で求まった状態量と一緒にして考えることにより、すべての未定定数が既知となり、振動時の状態量を表わすことが出来る。

$$W(\rho)=\sum_j^2 D_h R(\rho) P_j(\omega_j)\,\Omega_j\, e^{i\omega_j t}+D_p R_p(\rho)[N+\langle K\rangle]\sin pt \qquad (3)$$

§2. 移行演算　骨組構造物は、各節点で幾つかの部材が接合されている。全体的挙動を表わすにしても、各節点における変位の連続性と、力の平衡条件を満足していなければならない。このことは、各節点にて考えられるので、全節点で同時に式を建てたらよいのであろうが、各節点で移行演算を行い、逐次消去の手法にて漸化式にして、境界条件で固有値を決めたり、固有マトリクスを決定する。移行演算には各節点で12本の式が必要である。部材が2本だけならば、丁度、変位の連続と力の平衡とで12本の式が得られて余す所がないが、3本以上の部材が接続している節点では、変位の連続性を示す式が残る。漸化式に参画出来ない。これら剰余の式は平衡条件式に入っている幾つかの固有マトリクスの消去に用いれば漸化式も可成り簡素化しうる。それでも変位連続を示す式が残る場合は、境界条件と同格に扱って、固有値方程式または、固有マトリクス決定に参画させると、生じた各種条件式は余ることなく使用されることになる。今 (A, B), (C, D), (E, F) をそれぞれ1組として移行式をかけば、

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2' \end{bmatrix}Y_1+\begin{bmatrix} 0 \\ +\langle F_2'\cdot K_{Y_1}\rangle \end{bmatrix} \ ;\ \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2' \end{bmatrix}Y_1=\begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \langle A_1'\cdot K_{Y_1}\rangle \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$\begin{bmatrix}\mathbb{R}_3 & 0\\ 0 & \mathbb{R}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{Z}_3\\ \mathbb{Z}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{T}_3 & 0\\ 0 & \mathbb{T}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{X}_3\\ \mathbb{X}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{F}_{x1} & 0\\ 0 & \mathbb{F}_{x2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{X}_1\\ \mathbb{X}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{F}_2\\ \mathbb{F}_2'\end{bmatrix}\mathbb{Y}_2+\begin{bmatrix}\langle\mathbb{F}_{x1}\cdot\mathbb{K}_{x1}\rangle\\ \langle\mathbb{F}_{x2}\cdot\mathbb{K}_{x2}\rangle+\langle\mathbb{F}_2'\cdot\mathbb{K}_{y2}\rangle\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}\mathbb{A}_2\\ \mathbb{A}_2'\end{bmatrix}\mathbb{Y}_2=\begin{bmatrix}\mathbb{S}_3 & 0\\ 0 & \mathbb{S}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{Z}_3\\ \mathbb{Z}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \langle-\mathbb{A}_2'\mathbb{K}\rangle\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbb{D}_1 & 0\\ 0 & \mathbb{D}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{X}_1\\ \mathbb{X}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{D}_3 & \\ & \mathbb{D}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{X}_3\\ \mathbb{X}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\langle-\mathbb{D}_1\cdot\mathbb{K}_{x1}\rangle\\ \langle-\mathbb{D}_2\cdot\mathbb{K}_{x2}\rangle\end{bmatrix}\quad \text{(移行演算，固有マトリクス消去に参画しない式)} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbb{R}_5 & 0\\ 0 & \mathbb{R}_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{Z}_5\\ \mathbb{Z}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{T}_3' & 0\\ 0 & \mathbb{T}_4'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{X}_3\\ \mathbb{X}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\langle+\mathbb{T}_3'\cdot\mathbb{K}_{x3}\rangle\\ \langle+\mathbb{T}_4'\cdot\mathbb{K}_{x4}\rangle\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{F}_3\\ \mathbb{F}_3'\end{bmatrix}\mathbb{Y}_3+\begin{bmatrix}0\\ \langle+\mathbb{F}_3'\mathbb{K}_{y3}\rangle\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}\mathbb{A}_3\\ \mathbb{A}_3'\end{bmatrix}\mathbb{Y}_3=\begin{bmatrix}\mathbb{S}_5 & 0\\ 0 & \mathbb{S}_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{Z}_5\\ \mathbb{Z}_6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \langle-\mathbb{A}_3'\mathbb{K}_{y3}\rangle\end{bmatrix} \tag{6}$$

(4), (5), (6) に見られるように鉛直材方向に移行させ，A', B'… F'点における支持境界条件へ導く意図である．Y方向部材の固有マトリックスを消去して，鉛直部材の状態量へ混入させ $\mathbb{X}$ を以て最終固有マトリクスとなす．支持境界条件式は

$$\mathbb{B}_1\mathbb{Z}_1=\langle-\mathbb{B}_1\mathbb{K}_{z1}\rangle\ ;\ \mathbb{B}_2\mathbb{Z}_2=\langle-\mathbb{B}_2\mathbb{K}_{z2}\rangle\ ;\ \mathbb{B}_3\mathbb{Z}_3=\langle-\mathbb{B}_3\mathbb{K}_{z3}\rangle\ ;\ \mathbb{B}_4\mathbb{Z}_4=\langle-\mathbb{B}_4\mathbb{K}_{z4}\rangle\ ;\ \mathbb{B}_5\mathbb{Z}_5=\langle-\mathbb{B}_5\mathbb{K}_{z5}\rangle$$
$$\mathbb{B}_6\mathbb{Z}_6=\langle-\mathbb{B}_6\mathbb{K}_{z6}\rangle \tag{7}$$

となる．$\mathbb{K}$は荷重マトリクスをあらわし，斉次解のときは勿論（特解では）なく部材の0端では$\mathbb{K}$は入らない．故に(4), (5), (6) を解いて，(7) へ代入することにより，斉次解からは固有値方程式を得る．

$$\mathbb{H}(\omega)\,\mathbb{X}_n=0\quad,\quad \mathbb{X}_n=\mathbb{P}_j(\omega)\,\Omega_n \tag{8}$$

特解からは，固有マトリックス$\mathbb{X}$が決定されるので，鉛直部材，水平Y方向部材の固有マトリクスがすべて決まる．

§3. 初期條件

以上の結果特解は状態量を具体的に求められるが，斉次解には未定値Ω_nが残ったまゝである．これらを初期條件で決定する．例えば静止の状態を想定すれば，全体座標の3方向の変位がなく，また変位速度も0とすればよい．いいかえれば，構造部材の変位を全体座標の3方向変位に換算して考えればよい．内部粘性減衰があるときは，固有値は複素数となるので，斉次解は状態量も複素数となり，Ωも複素数で表わされる．故に固有値がn個あれば，Ωの実，虚部を決定するには，2n個の式を必要とし，それを初期條件から作り出すのである．それには3方向の変位と変位速度をFourier sine 級数でそれぞれ表示すれば，

$$\begin{bmatrix}\mathbb{U}\\ \dot{\mathbb{U}}\end{bmatrix}=0\qquad \begin{bmatrix}\mathbb{U}\\ \dot{\mathbb{U}}\end{bmatrix}=\sum_r^m \sin r\pi\bar{p}\left[\sum_j^n \mathbb{Q}_j\begin{bmatrix}[E]\\ i[\omega_j]\end{bmatrix}[1\ ,\ i]\begin{bmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\end{bmatrix}_j+\mathbb{B}_r\begin{bmatrix}[E]\\ [P]\end{bmatrix}\right]=0 \tag{8}$$

となり，$\sin r\pi\bar{p}$ の係数が恒等的に0にする．各項の実部，虚部の方程式を連立させて2n元の連立方程式を得る．

$$[\mathbb{A}]\,\Omega=\mathbb{B} \tag{9}$$

ここにおいてΩが決定されたので，もはやすべての未定定数が既知となり，立体骨組構造物の挙動を(3)で求めることが出来る．

§4. 計算例

高さ＝8m，スパン＝8m（連続）
奥行＝5m，同一断面積＝$0.64\,m^2$
断面2次モーメント＝$0.03413\ (m^4)$
$E=2.0\times10^6\ t/m^2$（鉄筋コンクリート）
$GJ=1.28\times10^5\ t/m^2$，$\gamma=2.4\ t/m^3$
$\varepsilon=0.00001$

固有値 $\omega=\omega_1+i\omega_2$

(26.66521, 0.003555)	(180.00251, 0.162004)
(27.08063, 0.003667)	(181.38901, 0.164511)
(34.95934, 0.006121)	(182.55382, 0.166629)
(62.40677, 0.019472)	(194.39523, 0.188947)
(75.01368, 0.028135)	(201.11347, 0.202234)
(124.49087, 0.077489)	(207.61142, 0.215512)
(141.45032, 0.100042)	(225.50766, 0.254268)
(171.27289, 0.146671)	(224.64354, 0.252324)
(172.40007, 0.148608)	(226.23771, 0.255917)

参考文献

谷本・石川：演算子法構造解析 I（森北出版）
谷本勉之助：マトリックス構造解析（日刊工業）