I-273　回転慣性およびせん断変形まで考慮した強制振動理論

八戸工業大学　正員　穂山　和男

1. はじめに

自由微小横振動において、回転慣性およびせん断変形まで考慮した強制振動の式を誘導する。その場合においても細長比が無限大になれば自由振動の場合と同様に[1]曲げ変形だけを考えた場合の式に帰着することを変断面まで含む一般論として証明する。

2. 強制振動の式の誘導

起振力による横方向変位をy，曲げ変形だけによるたわみ角を$\frac{\partial y_b}{\partial z}$（$y_b$：曲げモーメントだけによるたわみ）とすれば

$$\left.\begin{aligned} y(z,t) &= \sum_{j=1}^{\infty} Y_j(z)\, q_j(t) \\ \frac{\partial y_b(z,t)}{\partial z} &= \sum_{j=1}^{\infty} \Theta_j(z)\, q_j(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ここで、(Y_j, Θ_j)：固有関数[1]，$\Theta_j = \frac{dY_{bj}(z)}{dz}$，$Y_{bj}(z)$：曲げモーメントだけによるたわみ，$z$：軸方向座標，$t$：時間座標，$q_j(t)$：時間だけの関数，$j$：モードの次数

振動している棒の全長にわたって分布している慣性力は、単位長さあたり

$$-\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho I\frac{\partial^3 y_b}{\partial z \partial t^2} = -\sum_{j=1}^{\infty}\left(\rho A Y_j + \rho I \Theta_j\right)\frac{d^2 q_j}{dt^2} \qquad (2)$$

ここで、ρ：材料の密度，A：断面積，I：断面2次モーメント

仮設変位を

$$\left.\begin{aligned} \delta y &= Y_i\,\delta q_i \\ \delta\left(\frac{\partial y_b}{\partial z}\right) &= \Theta_i\,\delta q_i \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

とすれば、慣性力による仕事は、部材長をlとして

$$-\int_0^l\left\{\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y + \rho I\frac{\partial^3 y_b}{\partial z\partial t^2}\delta\left(\frac{\partial y_b}{\partial z}\right)\right\}dz = -\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^l\left(\rho A Y_i Y_j + \rho I \Theta_i \Theta_j\right)dz\cdot\frac{d^2 q_j}{dt^2}\cdot\delta q_i \qquad (4)$$

(4)式において

$$\int_0^l\left(\rho A Y_i Y_j + \rho I \Theta_i \Theta_j\right)dz = 0 \quad (i \neq j) \qquad (5)$$

である[1]ことを考慮すれば、(4)式は

$$-\int_0^l\left\{\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y + \rho I\frac{\partial^3 y_b}{\partial z\partial t^2}\delta\left(\frac{\partial y_b}{\partial z}\right)\right\}dz = -\int_0^l\left(\rho A Y_i^2 + \rho I \Theta_i^2\right)dz\cdot\frac{d^2 q_i}{dt^2}\cdot\delta q_i \qquad (6)$$

任意の瞬間における棒の曲げとせん断によるひずみエネルギーVは

$$V=\frac{1}{2}\int_0^\ell EI\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 dz+\frac{1}{2}\int_0^\ell k\left(\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 dz \tag{7}$$

ここで、E：ヤング率, $k=k'GA$, k'：断面形状に依存する係数, G：せん断弾性係数

(7)式に(1)式を代入すれば

$$V=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^\ell\left\{EI\left(\frac{d\Theta_j}{dz}\right)^2+k\left(\frac{dY_j}{dz}-\Theta_j\right)^2\right\}dz\cdot q_j^2$$

$$\therefore V=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}p_j^2\int_0^\ell(\rho AY_j^2+\rho I\Theta_j^2)dz\cdot q_j^2\quad\left(\because\int_0^\ell\left\{EI\left(\frac{d\Theta_j}{dz}\right)^2+k\left(\frac{dY_j}{dz}-\Theta_j\right)^2\right\}dz=p_j^2\int_0^\ell(\rho AY_j^2+\rho I\Theta_j^2)dz^{1)}\right) \tag{8}$$

ここで、p_j：j次の円振動数

弾性力による仮設仕事は

$$-\frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i=-p_i^2\int_0^\ell(\rho AY_i^2+\rho I\Theta_i^2)dz\cdot q_i\,\delta q_i \tag{9}$$

起振力として、分布力 $f(z,t)$ を考えれば、この力による仮設仕事は

$$\int_0^\ell(f\delta y)dz=\int_0^\ell(fY_i)dz\cdot\delta q_i \tag{10}$$

(6)式, (8)式, (10)式の和をとれば

$$\frac{d^2q_i}{dt^2}+p_i^2q_i=\frac{\int_0^\ell(fY_i)dz}{\int_0^\ell(\rho AY_i^2+\rho I\Theta_i^2)dz} \tag{11}$$

$x=z/\ell$, $u_i(x)=Y_i(z)/\ell$ とおけば、強制振動の式は、(11)式より

$$\frac{d^2q_i}{dt^2}+p_i^2q_i=\frac{\int_0^1(fu_i)dx}{\int_0^1\rho A\ell^2\left(u_i^2+\frac{\Theta_i^2}{H^2}\right)dx} \tag{12}$$

ここで、$H=\ell/R$, $R=\sqrt{I/A}$, $\Theta_i=\frac{d}{dx}(Y_{bi}/\ell)$

(12)式において、細長比Hを無限大にすれば

$$\frac{d^2q_i}{dt^2}+p_i^2q_i=\frac{\int_0^1(fu_i)dx}{\int_0^1\rho A\ell^2(u_i^2)dx} \tag{13}$$

$$\therefore\frac{d^2q_i}{dt^2}+p_i^2q_i=\frac{\int_0^\ell fY_i\,dz}{\int_0^\ell\rho AY_i^2dz} \tag{14}$$

となり、曲げ変形だけを考えた式に帰着する。

3. おわりに

自由振動の場合と同様に、細長比が大きいほど曲げ変形だけを考えた場合に近づく。

参考文献　1) 種山 和男：第39回年次学術講演会講演概要Ⅰ
2) チモシェンコ：工業振動学, 東京図書