

1. まえがき

有限要素法構造解析を用いた汎用最適設計問題においては制約関数の線形近似、特に逆変数を用いた方法の採用が効果的である。今後線形近似の採否はひとつの分類法と看做さるであろう。最適設計をその役割から構造解析、感度分析、最適化の3つの部分に分割する。これらの3つの部分における変数は互に関連はあるが別のものでよく、例えば、梁要素について考えると構造解析における変数は断面特性であり、したがって次の応答の一次微係数を求める感度分析においては同じ断面特性を変数とするのが便利である。一方最適化の段階における変数の選択として断面特性を用いることはいくつかの問題があり、特に最終的に最適断面寸法を決定する必要がある場合にはそれらの断面寸法を独立変数とするのが望しい。構造解析、感度分析に用いる変数を解析変数、最適化に用いる変数を設計変数と呼ぶことにする。梁要素の取り扱いにおける難点のひとつは多種類の断面形状を想定しなければならぬ点であるが解析変数を用いることにより感度分析までは形状の識別を不要とすることが出来る。異なる断面形状の識別は最適化の段階において行い、要素ライブラリーの考え方による、すなわち各断面形状毎に用意されたライブラリーは断面特性、その導関数、応力成分などの断面固有な情報を送り出すものである。この考え方の利点は各断面毎に必要とされる複雑な計算を全体の処理の流れから引き離して見通しをよくすることのできる点である。逆変数の使用についてはトラス要素あるいは板要素については十分研究されているが、梁要素については変数の選択の問題がある。トラスや板要素と同程度の高精度近似を期待するならば少なくとも断面特性の逆数を使用せねばならない。しかし断面寸法を設計変数とした場合でも次善の選択として断面寸法の逆数を用いることが考えられる。その検証を矩形断面片持梁を用いて行った。梁要素は2自由度要素(図-1)で線形静解析を対象とする。

2. 解析変数と設計変数

解析変数を一要素について次のように定義する

$$Y = \{A_1, A_2, A_3, \sqrt{I_1}, \sqrt{I_2}, \sqrt{I_3}\}^T$$

A_i および I_i は各々 i 軸に関する有効断面面積および2次モーメントである。したがって感度分析における

$$\text{要素剛性行列の微分は } \frac{\partial K_e}{\partial Y_i} = \frac{\partial K_e}{\partial A_i}, \quad \frac{\partial K_e}{\partial Y_i} = 2\sqrt{I_i} \frac{\partial K_e}{\partial I_i}$$

一方設計変数は形状寸法を用いて $X = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}^T$

感度分析において得られた微係数は次式により設計変数空間に変換されるなければならない。

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial X_i} \right\} = [J] \left\{ \frac{\partial f}{\partial Y_i} \right\}$$

$[J]$ はヤコビアン行列で $J_{ij} = \partial Y_j / \partial X_i$ である。

3. 挙動制約条件とその導関数

梁要素の応力評価は断面形状毎に予め定められた数表における応力成分、例えば矩形断面(図-2)の点Aにおける直応力を

$$\sigma_{11} = -\frac{R_1}{A_1} + \frac{M_2}{I_2} r_3 + \frac{M_3}{I_3} r_2$$

と表わす。 (R_1, M_2, M_3) は軸力および曲げモーメント、同様に剪断応力 $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ を求め次式によって相当応力

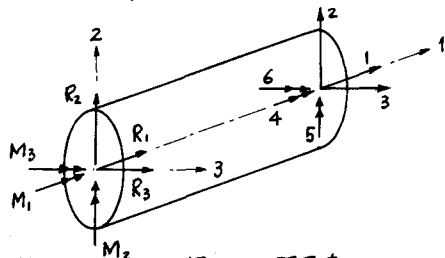


図-1 梁要素

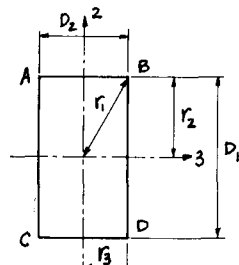


図-2 矩形断面

と計算する。 $\sigma_e = (\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{13}^2 + 3\sigma_{23}^2)^{1/2}$

応力の制約条件式は、 σ_a を許容応力とすると $g = \sigma_e / \sigma_a - 1$

設計空間における勾配は、 $\left\{ \frac{\partial g}{\partial X_i} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sigma_a} \sum_j \frac{\partial \sigma_e}{\partial Y_j} \cdot \frac{\partial Y_j}{\partial X_i} \right\}$

ここに、 $\frac{\partial \sigma_e}{\partial Y_j} = \frac{1}{\sigma_e} \left(\sigma_{11} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial Y_j} + 3\sigma_{12} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial Y_j} + 3\sigma_{13} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial Y_j} + 3\sigma_{23} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial Y_j} \right)$

直応力 σ_{11} の解析変数 Y_j による微分は

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial Y_j} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial R_1}{\partial Y_j} + \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial Y_j} + \frac{r_3}{I_2} \frac{\partial M_2}{\partial Y_j} - \frac{M_2 r_3}{I_2^2} \frac{\partial I_2}{\partial Y_j} + \frac{r_2}{I_3} \frac{\partial M_3}{\partial Y_j} - \frac{M_3 r_2}{I_3^2} \frac{\partial I_3}{\partial Y_j}$$

同様に断面応力 σ_{12} σ_{13} σ_{23} の解析変数による微分を求める必要がある。部材力 R_1 M_2 M_3 の Y_j による微分が感度分析の出力である。断面特性 $A_1 \sim I_3$ の微分は、もし Y_j が考慮中の梁要素の変数でないならばすべて零であり、所属する変数であるならば A_i に関しては零または 1、 I_i に関しては零または $2\sqrt{I_i}$ である。

4. 最適化問題とプログラム

線形化制約条件を伴う最適化問題は次のように書ける

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & F(X + \Delta X) \\ \text{subject to} \quad & g_j(X) + \nabla g_j(X) \cdot \Delta X \leq 0 \\ & |\Delta X_i| \leq c_i \\ & X_i^L \leq X_i + \Delta X_i \leq X_i^U \end{aligned}$$

プログラム作成においては、構造解析および最適化のプログラムに SAP4⁽¹⁾ と SOL1⁽²⁾ を各々フラットボックスとして用いた。変数連結、制約条件数の削減等を行いアクティブな解析変数を選択する機能を用いて感度分析計算の効率化をはかった。

5. 計算例

(1) 矩形断面片持梁による近似の精度

応力制約条件の線形近似を設計変数、逆設計変数、逆解析変数の各々の空間において行った結果を設計空間に変換プロットして比較すると図-3 のようになる。逆設計変数が安全側近似であり、精度的にも使用可能性がある。

(2) I-形断面片持梁の最小重量設計

図-4 に示す片持梁の設計を行い、逆変数の効果と構造解析の必要回数について目的関数の履歴を示す。

6. まとめ

解析変数と設計変数の分離、構造解析・感度分析・最適化の分割、相当応力による応力評価、要素ライブラリーの採用、逆設計変数による線形近似などによって、梁要素の最適設計における効率的取り扱いを検討した。

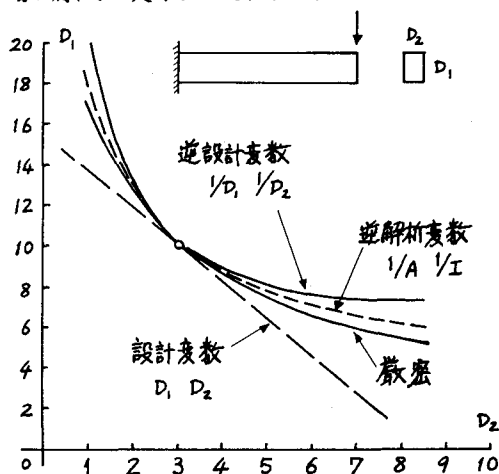


図-3 線形近似の精度

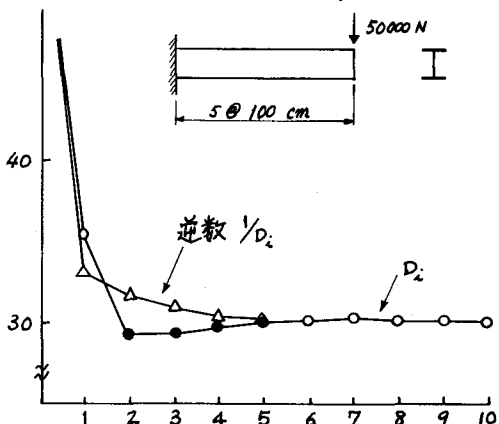


図-4

(1) Bath, Wilson & Peterson SAP IV Rep. No. EERC 73-11 U. of Calif, Berkeley, June 1973

(2) 大久保, 吉田, 古川 Optimizer Subroutine Library for Structural Design SOL-1 科研報告書 昭和59年3月。