

愛媛大学大学院 学生員 和多田 康男  
愛媛大学工学部 正会員 久久保 禎二

1 まえがき 材料の非線形性を考慮した構造物の解析法に関して、これまでに種々の方法が提案されているが、そのほとんどが荷重増分法に基礎をおく解法である。一方、エネルギー原理に基づく構造解析法として、1968年にSCHMIT, FOXらにより線形挙動を示す材料についてポテンシャルエネルギー最小化に基づく構造解析法に関する研究がなされている。本研究では材料の非線形性を考慮して、構造系のポテンシャルエネルギーおよびコンプリメンタリエネルギーを非線形計画法により最小化することにより構造物の非線形解析を行う方法について基礎的な考察を行ったものである。

2 エネルギー原理による構造解析の定式化<sup>1)</sup> エネルギー原理に基づく構造物の解析法は、ポテンシャルエネルギー最小化に基づく方法とコンプリメンタリエネルギー最小化に基づく方法があり、それぞれの構造解析法の定式化は次のようになる。

まず、ポテンシャルエネルギー最小化に基づく方法では未知変数として各可動節点の変位  $U = [U_1, \dots, U_n]^T$  ( $n$ : 自由度の数) を考慮し、構造要素のポテンシャルエネルギー  $(\alpha(U))$  および外力  $F = [F_1, \dots, F_n]^T$  のポテンシャルエネルギー  $(-F^T U)$  の和  $\Pi_P$  を最小にするような  $U^*$  が構造物の真の変位となることにより構造物の解析を行うことができる。トラス構造物に対してこの解析法を定式化すると次のようになる。

$$\text{Find } U, \text{ such that } \Pi_P(U) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(U) A_i l_i - F^T U \rightarrow \min. \quad (1)$$

ここに、 $m$  は部材の数、 $A_i, l_i$  はそれぞれ部材  $i$  の断面積および部材長である。

上式により  $\Pi_P$  を最小にする  $U^*$  が求められれば、各部材の部材力  $P^* = [P_1^*, \dots, P_m^*]^T$  は  $U^*$  の関数として単純に求められる。この方法の概略的な流れ図を図-1に示す。

一方、コンプリメンタリエネルギー最小化に基づく方法では、構造要素の部材力  $P^*$  を未知変数とし、各可動節点における力の釣合条件式を制約条件として構造要素のコンプリメンタリエネルギー  $(\beta(P_i))$  の和  $\Pi_C$  を最小にするような  $P^*$  を求めることにより構造解析を行う方法であり、トラス構造物に対しては次のように定式化される。

$$\text{Find } P, \text{ such that } \left. \begin{aligned} \Pi_C(P) &= \sum_{i=1}^m \beta_i(P_i) A_i l_i \rightarrow \min. \\ \text{subject to } & \mathcal{G} = F - CP = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 $\mathcal{G} = [g_1, \dots, g_n]^T$  は各可動節点における釣合条件式、 $C$  は  $P$  の  $F$  方向への変換マトリックスである。この方法の概略的な流れ図を図-2に示す。

本研究では上記の式(1)および式(2)の最小化問題を2種類の非線形計画法(SLP(逐次線形計画法)およびSQP(逐次二次計画法))を用いて解き、未知変数  $U$  および  $P$  を決定した。

3 SLPによる解法 SLP<sup>2)</sup>は目的関数、制約条件を共に線形近似し、さらに、変数の変域を制限する制約条件を付加して近似のLP問題を導入し、このLP問題を解き改良解を決定する。このような改良を反復して行い最適解を決定する手法である。式(1)および式(2)の最小化問題を解くための線形近似問題は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \Pi_P^T \Delta U &\rightarrow \min. \\ \text{subject to } |\Delta U| &\leq \xi U \end{aligned} \right\} \quad (3) \quad \left. \begin{aligned} \nabla \Pi_C^T \Delta P &\rightarrow \min. \\ \text{subject to } C \Delta P - \mathcal{G}_0 = 0, |\Delta P| &\leq \xi P \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

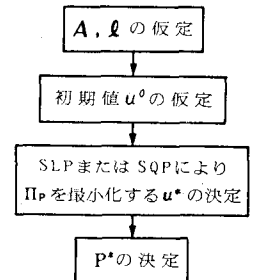


図-1 ポテンシャルエネルギー最小化による構造解析法の概略的な流れ図

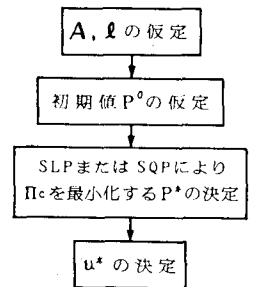


図-2 コンプリメンタリエネルギー最小化による構造解析法の概略的な流れ図

ここに、 $\nabla \Pi_P = \{\partial \Pi_P / \partial u_1, \dots, \partial \Pi_P / \partial u_n\}^T$ ,  $\nabla \Pi_C = \{\partial \Pi_C / \partial P_1, \dots, \partial \Pi_C / \partial P_m\}^T$ ,  $\Delta u$ ,  $\Delta P$  はそれぞれ  $u$  および  $P$  の変化量,  $\xi$  は変数の変域を制限するパラメータ (Move limit) である。

4 SQPによる解法 SQP<sup>2)</sup>は、まず目的関数を2次近似、制約条件を線形近似し2次計画問題を導入する。この問題を勾配射影法により解き改良解を求める。さらに目的関数の2次の係数行列をBFGS公式により修正し、改良解に対する新たな近似2次計画問題を作成する。このようにして逐次、2次計画問題を作成し解の改良を繰り返すことにより最適解を決定する方法である。SQPにより式(1)および式(2)の最小化問題を解くための近似2次計画問題は次のようになる。

{ポテンシャルエネルギー最小化に基づく方法}

$$\nabla \Pi_P^T \Delta u + \frac{1}{2} \Delta u^T H_P \Delta u \rightarrow \min. \quad (5)$$

{コンプリメンタリエネルギー最小化に基づく方法}

$$\nabla \Pi_C^T \Delta P + \frac{1}{2} \Delta P^T H_C \Delta P \rightarrow \min. \quad (6)$$

subject to  $C \Delta P - g_0 = 0$

ここに、 $H_P$  および  $H_C$  は式(1)あるいは式(2)の最小化問題のラグランジュ関数の1次の偏微係数を用いてBFGS公式によって計算される。

### 5 解析結果および各解法の比較

上記の方法により種々の不静定トラスの解析を行い、各解法の比較検討および荷重増分法との比較を行った。図-3のような非線形材料を仮定し、図-4に示す3, 6, 10部材トラスの解析を行った結果を表-1に示す。いずれのトラスの解析結果も荷重増分法により得られた解とほぼ一致しており、本研究の方法による構造物の非線形解析が可能であることが明らかとなった。しかしポテンシャルエネルギー最小化に基づく方法では、最小化すべき目的関数のみの単純な定式化となるが、一般に収束性が遅くトラスの部材数の増加と共に最終解に到達するために必要となる反復計算回数が大きく増加し、それに伴い計算時間も多くなっている。一方、コンプリメンタリエネルギー最小化に基づく方法では、各可動節点における釣合条件式の制約条件を考慮している関係から反復計算回数がポテンシャルエネルギー最小化に基づく方法ほど大きく増加しない。特にSQP法を用いた場合にはトラスの部材数にあまり関係なく10回前後の繰り返し回数で最終解に収束し、計算時間も荷重増分法の1/2ないしはほぼ等しい値となっている。このようにエネルギー原理に基づく構造解析法は、材料の線形性や非線形性に関係なく構造物の解析を行うことができ、適用する理論および最小化の手法によっては荷重増分法に比べても能率的に解を得ることができる。さらに非線形計画法をサルーチンとして利用する場合には定式化が非常に簡単であり、構造物の非線形解析法として十分有効であると思われる。

参考文献 1) 鷲津久一郎: エネルギー原理入門, 培風館

2) 大久保 潤二: 構造設計における Optimizer Subroutine Library の作成, 昭和58年度科学研費補助金(試験研究(1)) 研究成果報告書

表-1 各解法による解析結果の比較

	ポテンシャルエネルギー最小化による解析法								コンプリメンタリエネルギー最小化による解析法							
	変位 (cm)				$H_P$	ITE	節力 (x1000kg)				$H_C$	ITE	CPU			
	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	(kg-cm)	(in)	(秒)	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	(kg-cm)	(in)	(秒)		
3部材トラス	線形解 <sup>1)</sup>	0.00	-1.17	—	—	—	—	11.72	23.43	11.72	—	—	—	—		
	初期値	1.00	-1.00	—	—	-159.	—	11.72	23.43	11.72	—	957.	—	—		
	S L P	0.02	-1.39	—	—	-241.	17	0.21	13.87	20.39	13.87	—	241.	10	0.21	
	S Q P	0.00	-1.39	—	—	-241.	8	0.19	13.93	20.30	13.93	—	241.	8	0.23	
	荷重増分法 <sup>4)</sup>	0.00	-1.39	—	—	-241.	—	0.40	13.87	20.39	13.87	—	241.	—	0.40	
6部材トラス	線形解	0.08	-0.38	-0.12	-0.46	—	—	15.86	-22.43	15.86	-24.14	—	—	—		
	初期値	10.00	-10.00	-10.00	-10.00	4330.	—	—	15.86	-22.43	15.86	-24.14	2388.	—		
	S L P	0.99	-20.31	-1.38	-21.33	-1884.	76	0.87	19.71	-27.87	19.71	-20.29	1884.	20	0.49	
	S Q P	1.00	-20.34	-1.43	-21.33	-1884.	172	1.24	19.71	-27.87	19.71	-20.29	1884.	8	0.31	
	荷重増分法	0.99	-19.71	-1.29	-20.69	-1884.	—	0.60	19.71	-27.87	19.71	-20.29	1884.	—	0.60	
10部材トラス	線形解	-1.49	-2.89	-2.05	-8.05	—	—	-29.88	-11.05	-14.31	13.97	—	—	—		
	初期値	-10.00	-10.00	-10.00	-10.00	9129.	—	—	-29.88	-11.05	-14.31	13.97	1756.	—		
	S L P	-9.86	-11.23	-10.41	-33.07	-1742.	456	7.86	-30.03	-11.28	-14.10	14.19	1755.	40	2.38	
	S Q P	-11.20	-12.60	-11.76	-37.12	-1755.	624	6.37	-29.93	-11.04	-14.25	14.04	1755.	10	0.73	
	荷重増分法	-10.98	-12.39	-11.53	-36.55	-1755.	—	0.71	-29.98	-11.04	-14.17	14.11	1755.	—	0.71	

1) 最終解を得るために要した繰り返し回数

2) FACOM M180AD による計算時間

3) 材料が線形弾動を示す釣合の解

4) 荷重増分法による解析結果

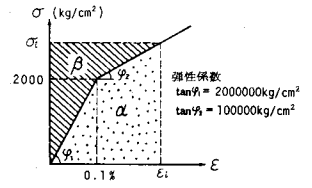
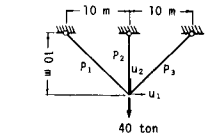
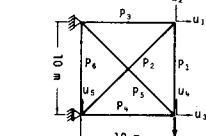


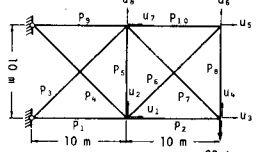
図-3 応力とひずみの関係



a) 3部材トラス (all  $A_i = 10\text{cm}^2$ )



b) 6部材トラス (all  $A_i = 10\text{cm}^2$ )



c) 10部材トラス (all  $A_i = 10\text{cm}^2$ )

図-4 トラス構造物の形状