

京都大学工学部 正員 ○ 田 村 武
 京都大学工学部 正員 小 林 昭 一
 運輸 省 正員 宮 井 真一郎

1. はじめに

従来の最適設計においては、単一の目的関数の最小（最大）化を図ることが多い。たとえば、変位の大きさを制約条件とするトラス構造の最小重量設計などが代表的である。一方、2つ以上の目的関数を有する最適化の理論とその計算手法がいくつか提案されている。そこで、ここでは重量のみならず変位の大きさをも目的関数に含むトラス構造の最適設計問題に対して、多目的計画理論の概念を適用し、その最適解（Pareto解）の集合の特性について基礎的な考察を行う。

2. Pareto解の定義

（ベクトル値）目的関数 $y = f(x)$ の定義域を $x \in \mathbb{R}^n$ また値域を $y \in \mathbb{R}^m$ とする（図-1参照）。このとき、Y（あるいはX）の要素 y^0 （あるいは $x^0 = f^{-1}(y^0)$ ）が Pareto 解であるとは、

$$1) y^0 \in Y$$

かつ、

$$2) y^1 \leq y^0 \text{ なる } y^1 \in Y \text{ は存在しない}$$

ことを意味する（図-1（b）の太線）。ここに、不等号 $y^1 \leq y^0$ は、 $y_j^1 \leq y_j^0$ ($j=1, 2, \dots, m$) であり、かつ少なくとも1つの j に対し $y_j^1 < y_j^0$ を表す。

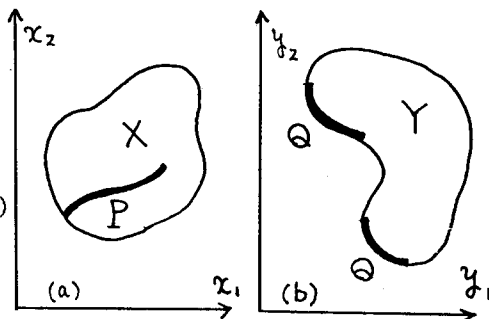


図 - 1

3. 重量と変位を目的関数とする静定トラス構造の最適設計問題

静定トラスにおいては、総重量 W 、および節点変位 D_j は次式で表される。

$$W = \sum_{i=1}^n \rho A_i l_i, \quad D_j = \sum_{i=1}^n \frac{S_i \bar{S}_{ji}}{EA_i} l_i \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

ここに、 ρ 、 E は部材の単位体積重量、ヤング率、 A_i 、 l_i は部材 i の断面積、長さをそれぞれ表す。また、 S_i 、 $\bar{S}_{ji}$ は実荷重による部材力、節点変位を求めるための仮想荷重による部材力をそれぞれ意味する。そこで、以下のような最適設計問題を考える。

〔問題A〕

$$\left. \begin{matrix} W \\ D_j \end{matrix} \right\} \rightarrow \min. \quad \text{sub. to } A_i \geq A_{i0}$$

つまり、各部材が与えられた最小断面積 A_{i0} 以上のもとで、総重量といくつかの節点変位を（Paretoの意味で）同時に最小にする設計はいかなるものであるか、を明らかにする問題である。

まず、問題をいわゆる凸計画問題の枠に入れるために設計変数 A_i の逆数 x_i を独立変数としたうえ、係数に適当な尺度変換をすることにより、上記の問題を簡単化する。

〔問題B〕

$$\left. \begin{matrix} w = \sum c_i / x_i \\ d_j = \sum b_{ji} x_i \end{matrix} \right\} \rightarrow \min. \quad \text{sub. to } x_i \leq x_{i0} \quad (x_i \geq 0)$$

ここに、 c_i は正数である。

4. 2目的関数 ($k=1$) の場合

簡単のため、図-2に示す2部材トラスを例にとる。目的関数は総重量と節点における沈下とする。上記の〔問題B〕の特殊な場合として、次のように定式化できる。

$$\begin{aligned} \text{〔問題C〕} \quad & \left. \begin{aligned} w &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \\ d_1 &= x_1 + x_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \min. \text{ sub. to } x_i \leq 1 \end{aligned}$$

設計変数の定義域 X より、目的関数のなす領域 Y が容易に求められる(図-3参照)が、これより Pareto 解は太い線で示した Q となる。つまり、 Q 上のいかなる点をとっても、その点より、重量、沈下の両者がともに小さくなる設計は存在しない。なお、設計空間における Pareto 解は対角線 OB である。

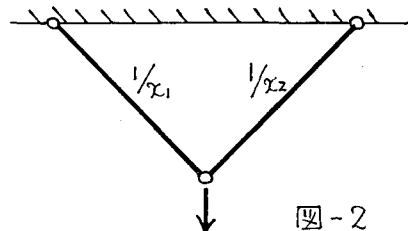


図-2

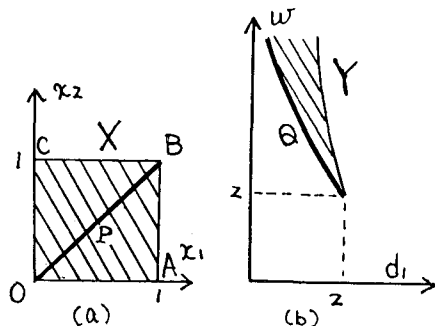


図-3

5. 重量のみを目的関数とする場合からの考察

従来の最適設計のように、総重量のみを目的関数とし、沈下量を制約条件とする次の問題を考える。

$$\text{〔問題D〕} \quad w \rightarrow \min. \text{ sub. to } \begin{cases} d_1 \leq d_{10} \\ x_i \leq 1 \end{cases}$$

ここで、沈下量の制限値 d_{10} に対する最小重量 $\phi(d_{10})$ (いわゆる最適値関数)は図-4のようになるが、この関数の曲線部分は図-3(b)に示す Pareto 解そのものである。最適値関数の負の勾配は、制約条件にかかる Lagrange 乗数であるが、このことより曲線部 (Pareto解) においては、沈下に関する制約条件が active であることを表している。

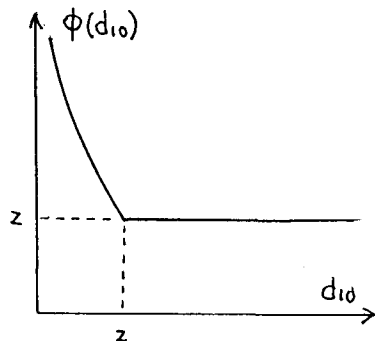


図-4

6. 一般の場合 (〔問題B〕) の Pareto 解の特性について

以上、述べた簡単な例から〔問題B〕の Pareto 解について、次のような推測をすることができる。すなわち、目的関数に含まれる節点変位をすべて制約条件とみなして、〔問題D〕のように総重量のみを目的関数とする問題を考える。このとき、これらのすべての制約条件にかかる Lagrange 乗数のみが正とすれば、この単目的関数の問題の最適解は、もとの〔問題B〕の Pareto 解である。以下、これを簡単に示してみる。

いま、上記の条件を満たす単目的の問題の最適解 x^0 が Pareto 解でないとする。定義より、 Δx が存在して、式(1)を満たす。一方、凸関数の性質より式(2)ように変形できる。式(2)の各式に上から、1, λ_1 , ..., λ_k (Lagrange乗数)を乗じて加え合わせると式(3)を得るが、これは Kuhn-Tucker 条件に矛盾する。従って、 x^0 は Pareto 解である。

$$\begin{pmatrix} w(x^0 + \Delta x) \\ d_1(x^0 + \Delta x) \\ \vdots \\ d_k(x^0 + \Delta x) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} w(x^0) \\ d_1(x^0) \\ \vdots \\ d_k(x^0) \end{pmatrix} \quad (1), \quad \begin{pmatrix} \nabla w(x^0)^T \Delta x \\ \nabla d_1(x^0)^T \Delta x \\ \vdots \\ \nabla d_k(x^0)^T \Delta x \end{pmatrix} \leq 0 \quad (2), \quad \left(\nabla w(x^0) + \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla d_j(x^0) \right)^T \Delta x < 0 \quad (3)$$