I-166 変位制約と応力制約を受ける連続構造の形状改訂方法について

八戸工業大学 正会員 長谷川 明

1．はじめに

本手法は，構造解析に有限要素法を用い，与えられた変位条件，応力条件を同時に満足する連続構造の形状を求めるものである。変位条件は定められた節点のある方向についての変形量として与えられ，応力条件は各要素に対し，要素の応力状態を代表できるもの，例えば相当応力，主応力の最大値について与えるものとする。形状改訂方法は，節点座標の改訂による変位および応力の変化率を直接数値微分により求め，これらが所定の値となるよう座標変更するものである。

2．形状改訂方法について

1)制約条件

a)変位条件　$\delta_j = \delta_0 \quad (j = 1 \sim nd)$　(1)

δ_j：節点 j の水平あるいは鉛直変位

δ_0：変位条件値（基準変位と呼ぶ）

nd：変位条件数

b)応力条件　$\bar{\sigma}_j = \bar{\sigma}_0 \quad (j = 1 \sim ne)$　(2)

$\bar{\sigma}_j$：要素 j の応力状態の代表値（相当応力）

$\bar{\sigma}_0$：応力条件値（基準応力と呼ぶ）

ne：要素数

2)座標変更方法

試行回数 k 回目の相当応力および変位を $\bar{\sigma}_j^k$, δ_j^k と表わすと

$$\bar{\sigma}_j^{k+1} = \bar{\sigma}_j^k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{\sigma}_j^k}{\partial x_i} \Delta x_i \qquad (3)$$

$$\delta_j^{k+1} = \delta_j^k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \delta_j^k}{\partial x_i} \Delta x_i \qquad (4)$$

ここで　x_i：節点座標

Δx_i：節点座標 x_i の移動量

n：移動可能節点座標数

(3), (4) が b)の条件を満たすためには

$$\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_j^k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{\sigma}_j^k}{\partial x_i} \Delta x_i \qquad (5)$$

$$\delta_0 = \delta_j^k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \delta_j^k}{\partial x_i} \Delta x_i \qquad (6)$$

とするよう Δx_i を求めればよい。

このため，要素総数に変位条件数を加えた数に等しい座標を移動可能座標として選び出すと(5), (6)から

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_1^k \\ \vdots \\ \bar{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_{ne}^k \\ \delta_0 - \delta_1^k \\ \vdots \\ \delta_0 - \delta_{nd}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}_1^k}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_1^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{\sigma}_1^k}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{ne}^k}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_{ne}^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{\sigma}_{ne}^k}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \delta_1^k}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta_1^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \delta_1^k}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \delta_{nd}^k}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta_{nd}^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \delta_{nd}^k}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_{ne} \\ \Delta x_{ne+1} \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

となり

$$\begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_{ne} \\ \Delta x_{ne+1} \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}_1^k}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_1^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{\sigma}_1^k}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{ne}^k}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_{ne}^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{\sigma}_{ne}^k}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \delta_1^k}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta_1^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \delta_1^k}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \delta_{nd}^k}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta_{nd}^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \delta_{nd}^k}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_1^k \\ \vdots \\ \bar{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_{ne}^k \\ \delta_0 - \delta_1^k \\ \vdots \\ \delta_0 - \delta_{nd}^k \end{Bmatrix} \qquad (8)$$

と座標変更量が求められる。

3) (8)式における $\frac{\partial \bar{\sigma}_j^k}{\partial x_i}$ $\frac{\partial \delta_j^k}{\partial x_i}$ の計算方法

$\frac{\partial \bar{\sigma}_j^k}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \delta_j^k}{\partial x_i}$ は座標変更による応力，変位の変化率であるから，各座標毎に Δx_i だけ移動した後の構造解析を行なうことにより直接計算可能である。しかし，これでは移動可能座標数 n 個の構造解析が必要となり，多大な計算時間を要することとなる。このため，本法では次のように求めている。

変位 $\{d\}$，応力 $\{\sigma\}$ は有限要素解析において

$$[K]\{d\} = \{P\} \qquad (9)$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\} \qquad (10)$$

と表わされている。

ここで　$[K]$：剛性マトリックス

$\{P\}$：荷重ベクトル

$[D]$：応力ひずみマトリックス

$[B]$：変位ひずみマトリックス

(9)の両辺を x_i で微分すると $\{P\}$ は x_i と無関係であるから

$$\frac{\partial [K]}{\partial x_i}\{d\} + [K]\frac{\partial \{d\}}{\partial x_i} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial\{d\}}{\partial x_i} = -[K]^{-1}\frac{\partial[K]}{\partial x_i}\{d\} \qquad (11)$$

また，(10)式の両辺をx_iで微分すると$[D]$はx_iと無関係であるから

$$\frac{\partial\{\sigma\}}{\partial x_i} = [D]\frac{\partial[B]}{\partial x_i}\{d\} + [D][B]\frac{\partial\{d\}}{\partial x_i}$$

となり，これに(11)を代入すると

$$\frac{\partial\{\sigma\}}{\partial x_i} = [D]\frac{\partial[B]}{\partial x_i}\{d\} - [D][B][K]^{-1}\frac{\partial[K]}{\partial x_i}\{d\} \qquad (12)$$

となる。(12)式の中の$\frac{\partial[B]}{\partial x_i}$, $\frac{\partial[K]}{\partial x_i}$は直接数値微分により求めている。また$\bar{\sigma}_j$は$\sigma_j$の関数であれば，(12)の$\frac{\partial\{\sigma\}}{\partial x_i}$から$\frac{\partial\bar{\sigma}_j^k}{\partial x_i}$が求められる。

4)改訂移動量の制限

(8)式から求められる$\{\Delta x_i\}$は，$\bar{\sigma}_0$と$\bar{\sigma}_j^k$あるいはδ_0とδ_j^kが大きく異なる場合，大きな移動量となり，次の試行においては一部の要素面積が負となる不合理が発生する。このため，節点移動に移動幅の制限(move limit)を設け，各要素面積が負とはならないよう計算した。したがって実際の改訂は次式で行なった。

$$x_i^{k+1} = x_i^{k} + \varepsilon\Delta x_i \quad (0<\varepsilon\leq 1) \qquad (13)$$

3. 計算例

本手法の妥当性を確認するため，ごく簡単なモデルについて形状改訂を行なった。要素数2，変位条件数1のモデルである。応力条件は各要素の主応力の絶対値の最大値を選び，変位条件は載荷点の鉛直変位とした。この要素数に変位条件数を加えた3個の移動可能座標としてY_1, X_3, Y_3を選んだ。case2はcase1に対し変位条件だけを10%厳しくし，その他の条件は同一としたものである。Fig.1はそれぞれの形状改善の過程を，Fig.2はその時の各応力および条件とした変位が基準値に対しどのように改善されていくかを示したものである。

いずれの場合も変位，応力は振動しながら基準値に近づいており，試行回数9回目には基準値に対し±2%以内におさまっている。また，得られた形状は，要素毎では互いに異なっているが，全体ではほぼ似かよった形を示した。なお，試行回数9回目の全断面積は初期の断面積に対し50%となっている。

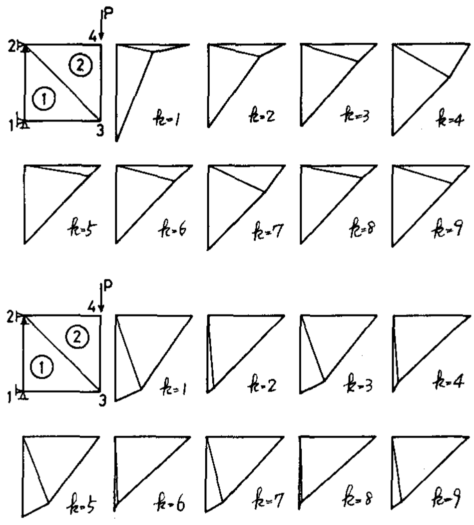

Fig.1. 形状改訂過程(上段: case1, 下段 case2)
k: 試行回数

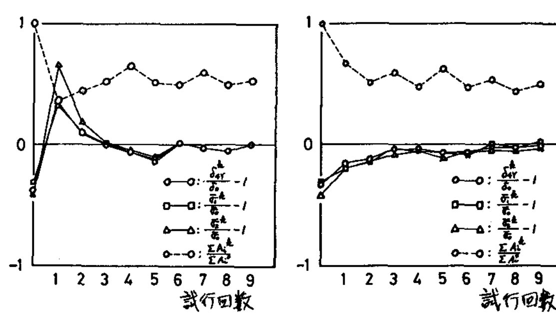

Fig.2. 変位,応力の改善状況(左: case1, 右 case2)

4. おわりに

本法によれば，簡単なモデルの場合，変位制約および応力制約を同時に満足する連続構造の形状を得ることができる。しかし，1)条件数と一致する移動可能座標の選び方，2)要素数の多い場合の要素面積を0とするような座標変更に対する対応策，3)試行中の各要素の要素面積，要素形状の平均化，平滑化等の問題点がある。

今後これらを解析し，さらに研究を進めたいと考えている。

<参考文献>
1) Uri Kirsch, 最適構造設計 ー概念・方法・応用, 丸善