I-165　ファジィ計画問題の土木構造問題への適用について

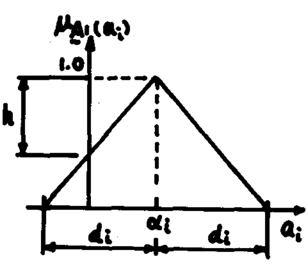
信州大学工学部　正員　小　山　健

<u>1. まえがき</u>　土木構造問題における計画問題は、一般には、crispな制約条件のもとで，crisp な目的関数を最大化あるいは最小化する問題として定式化されてきている例がほとんどである。しかしながら，土木構造物のように，主として公共性の高い構造物を設計・施工する場合にはむしろ，多くのニーズによる多目的な条件が主になることの方が現実的であろう。従ってこのような場合には，まあこの程度の条件のもとで，だいたいこの程度の目的が満足されゝばよいといった，意味論的にあいまいな計画問題としての定式化の方が望ましいと思われる。本文では，このような意味論的にあいまいな計画問題の土木構造問題への適用を試みたものである。そのために，ここではこの問題をファジィ計画問題として処理している。ただし現段階では，計画問題で解を得るための最後の部分で，だいたいといった量を定量化するのに主観的判断によっていることを断っておく。

<u>2. 定式化</u>　一般に計画問題は次のように表わされる。制約：$\mathbb{A}\mathbb{X} \geq \mathbb{b}$，目的関数：$z = \mathbb{C}\mathbb{X} \rightarrow \max.$ or $\min.$ ―(1)。この問題をあいまいな制約および目的関数を用いて書き改めると次のようになる。制約：$\mathbb{A}\mathbb{X} \gtrsim 0$，目的関数（目標）：$z = \mathbb{C}\mathbb{X} \gtrsim z_0^*$ ―(2)．こゝで，$\gtrsim$はだいたいといったあいまいさを表わし，z_0^*は目標を表わす。いま，制約条件の集合を $\underset{\sim}{\Omega}$，目標となる集合を$\underset{\sim}{\Phi}$，それぞれのメンバシップ関数を $\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(\mathbb{x})$，$\mu_{\underset{\sim}{\Phi}}(\mathbb{x})$ と表わすと，$\mathbb{x}$がファジィ決定集合 $\underset{\sim}{D}$ に属する度合は，$\min\{\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(\mathbb{x}), \mu_{\underset{\sim}{\Phi}}(\mathbb{x})\}$ として定義され，最大化決定として，$\max_{\mathbb{x}} \mu_{D}(\mathbb{x}) = \mu_{\underset{\sim}{D}}(\mathbb{x}^*)$ となる $\mathbb{x}^*$ を求める問題をここではファジィ計画問題として定式化する[1),2)]。

《問題１》　ここでは式(2)のパラメタ$\mathbb{A}$，$\mathbb{b}$，$\mathbb{C}$があいまいな場合についての定式化を行う。式(2)において制約も目標も区別なく次のように表わす。$\underset{\sim}{\mathbb{Y}} = \underset{\sim}{\mathbb{A}}\mathbb{x} \gtrsim 0$ ―(3)．ここで $\underset{\sim}{Y_i} = \underset{\sim}{b_i} x_0 + \underset{\sim}{A_{i1}} x_1 + \cdots\cdots + \underset{\sim}{A_{in}} x_n \gtrsim 0$．ただし，$x_0 = 1$で，ファジィ不等号$\gtrsim 0$は $\underset{\sim}{Y_i}$ がだいたい正であることを意味している。いま $\underset{\sim}{A_i}$ のファジィさを表現するものとして，図－１におけるように，だいたい α_i であるという中心と，そのあいまいさを表わす d_i で表現すると，$\underset{\sim}{A_i}$ のメンバシップ関数は次のように表わされる。[1)]

$$\mu_{\underset{\sim}{A_i}}(a_i) = \begin{cases} 1 - |a_i - \alpha_i| / d_i \ ; & \alpha_i - d_i \leq a_i \leq \alpha_i + d_i \\ 0 & ;\ \text{その他} \end{cases} \quad \text{―(4)}$$



図－1

ファジィパラメタを$\underset{\sim}{\mathbb{A}} = (\boldsymbol{\alpha}, \mathbb{d})$とし，ファジィ線形関数(3)のメンバシップ関数 $\mu_{\underset{\sim}{Y}}(y)$ は式(5)のように表わされる。

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(y) = \begin{cases} 1 - |y - \mathbb{x}^T\boldsymbol{\alpha}| / (\mathbb{d}^T\mathbb{x}) \ ; & \mathbb{x} \neq 0 \\ 1 & ;\ \mathbb{x} = 0,\ y = 0 \\ 0 & ;\ \mathbb{x} = 0,\ y \neq 0 \end{cases} \quad \text{――(5)}$$

なお式(5)の詳しい証明は文献 1) にゆずる。いま，ファジィ集合$\underset{\sim}{Y_i}$ がだいたい正であることを次のように定義する[1),2)]。$\underset{\sim}{Y_i} \gtrsim 0 \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{Y_i}}(0) \leq 1-h$，$\mathbb{x}\boldsymbol{\alpha} \geq 0$ ―(6)．この式に従って式(3)を式(5)のように書き改めると，$\mu_{\underset{\sim}{Y_i}}(0) = 1 - (\boldsymbol{\alpha}_i^T\mathbb{x}) / (\mathbb{d}^T\mathbb{x}) \leq 1-h$，$\boldsymbol{\alpha}_i^T\mathbb{x} \geq 0$ ―(7) となる。この式(7)は簡単に次のように表わされる。$(\boldsymbol{\alpha}_i^T - h\mathbb{d}_i^T)\mathbb{x} \geq 0$，$(i = 0, \cdots\cdots, m)$ ―(8)．従って，この問題は，式(8)のもとに $h \rightarrow \max$（図－１参照）となるような解 $\mathbb{x}^*$，h^* を求める問題となる（hが大きい程$\underset{\sim}{Y_i} \gtrsim 0$となる度合が大きい）。これをノンファジィ決定としてのファジィ非線形計画問題と呼ぶ。

《問題２》　ここでは，パラメタ$\mathbb{A}$，$\mathbb{C}$はcrispなもので$\mathbb{b}$があいまいな条件のもとでいかにあいまいな決定ができるかについて定式化する．つまり解をファジィ集合$\underset{\sim}{\mathbb{x}}$ として求めるための定式化を行う。この場合，式(3)は次のように書き改められる。$\underset{\sim}{\mathbb{Y}} = \mathbb{b} + \boldsymbol{\alpha}^T\underset{\sim}{\mathbb{x}} \gtrsim 0$ ―(9)．パラメタ$\boldsymbol{\alpha}$はノンファジィであるとする。ここで，$\underset{\sim}{Y_i} = \underset{\sim}{x_{i0}} + \alpha_{i1}\underset{\sim}{x_1} + \cdots\cdots + \alpha_{in}\underset{\sim}{x_n}$ $(i = 0, \cdots\cdots, m)$と表現すると式(9)のベクトル$\boldsymbol{\alpha}$は$\alpha_i = (1, \alpha_{i1} \cdots\cdots, \alpha_{in})^T$

となる。また，$\{\tilde{x}_{i0}, \tilde{x}_{i1}, \cdots, \tilde{x}_{in}\} = \{\bar{x}_i, d_i\}$，$(i=0,\cdots,m)$ で表わす。ただし，ファジィ集合 $\tilde{x}_i$ は中心 $\bar{x}_i$ その幅を d_i とするものである。この問題ではある規準 h^* が与えられると，式(9)を式(5)に従って式(8)のように書き改めると，$\bar{x}_i^T\alpha_i - h|\alpha_i|^T d_i \geq 0$，$(i=0,\cdots\cdots,m)$ —(10) となる。この式(10)を制約条件としてファジィ集合 $\tilde{x}$ の可能なかぎりあいまいな解を求めることは結局，目的関数 $Z=\sum_i k_i d_i \longrightarrow max$ (11) と同等である。[1] こゝで，k_i はどの解 $\tilde{x}_i$ をよりあいまいに求めるかの重みを表わすパラメタである。以上によって Z を最大にする解 $\tilde{x}_i=(\bar{x}_i, d_i)$ を求めることをこゝではファジィ線形計画問題におけるファジィ決定とよぶ。[1]

3. 計算例

＜問題１の計算例＞

文献1)に次のような計算例が示されている。

$\tilde{6}x_1+\tilde{5}x_2 \gtrsim \tilde{30}$; $Y_0=-\tilde{30}+\tilde{6}x_1+\tilde{5}x_2 \gtrsim 0$ ①

$\tilde{2}x_1+\tilde{9}x_2 \gtrsim \tilde{45}$: $Y_1=\tilde{45}-\tilde{2}x_1-\tilde{9}x_2 \gtrsim 0$ ②

$\tilde{11}x_1-\tilde{5}x_2 \lesssim \tilde{44}$; $Y_2=\tilde{44}-\tilde{11}x_1+\tilde{5}x_2 \gtrsim 0$ ③

$-\tilde{2}x_1+\tilde{3}x_2 \lesssim \tilde{12}$; $Y_3=\tilde{12}+\tilde{2}x_1-\tilde{3}x_2 \gtrsim 0$ ④

この例題ではファジィ集合 $\tilde{A}_i$ が次のように仮定されている。

$\tilde{A}_1=\{\alpha_1=(-30, 6, 5), d_1=(6, 2, 1)\}$

$\tilde{A}_2=\{\alpha_2=(45, -2, 9), d_2=(8, 2, 3)\}$

$\tilde{A}_3=\{\alpha_3=(44, -11, 5), d_3=(4, 2, 1)\}$

$\tilde{A}_4=\{\alpha_4=(12, 2, -3), d_4=(4, 1, 2)\}$

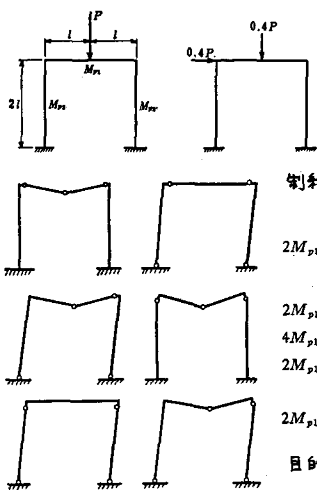
文献1)では $h=0.5$ として解 $x^*=(4.50, 2.62)$ を得ている。しかしこの問題は，$h=0.5$ として解を得るのではなく，普通の非線形計画手法により x^*，h を求めるものでなくてはならない。SLPを用いて解を求めると，$x^*=(4.416, 2.562)$，$h=0.535$ となる。上式①～④のメンバシップ関数については，紙面の都合上当日に図示する予定である。

4. まとめ

ファジィ計画問題の土木構造問題への適用というテーマで述べてきたが適用可能な部分は今後の研究の発展しだいではかなりの部分にまで広げられる可能性は残されているように思う。しかし現段階では，あまり複雑な問題への適用は望めない。今後の研究の進展が待たれる。

［参考文献］ 1)田中，浅居：ファジィ関数による線形計画問題の定式化，システムと制御，No. 6，1981． 2)田中，浅居他：ファジィ関数によるファジィ線形計画問題の定式化，計測自動制御学会，Vol. 9，1983．
3)長 尚：構造物の最適設計，朝倉書店，1971.

＜問題２の計算例＞



図－2

こゝでは文献3)にある例題をとり上げることにする。このラーメンの崩壊形式による制約条件式は次のように表わされる。

制約：

$$\left.\begin{array}{r} 4M_{p1} \geqq Pl, \\ 2M_{p1}+2M_{p2} \geqq Pl \\ 4M_{p1} \geqq 0.4Pl, \\ 2M_{p1}+2M_{p2} \geqq 0.8Pl, \\ 4M_{p1}+2M_{p2} \geqq 1.2Pl. \\ 2M_{p1}+2M_{p2} \geqq 0.4Pl, \\ 4M_{p2} \geqq 0.8Pl, \\ 2M_{p1}+4M_{p2} \geqq 1.2Pl, \end{array}\right\} (12)$$

また目的関数を一般的な重量として とると式(13)のように表わされる。

目的関数：

$$G=2M_{p1}l+4M_{p2}l \longrightarrow min. \quad —(13)$$

この例の crisp な条件での解は $(M_{p1}, M_{p2})=(0.3Pl, 0.2Pl)$，目的関数値 $1.4Pl^2$ と求められている。この目的関数の値から，だいたいの目標として $2\tilde{M}_{p1}l+4\tilde{M}_{p2}l \lesssim 1.6Pl^2$ とする。これらを式(10)の表現で書き改めると以下のようになる。ただし制約条件の採用については多少の工学的判断を加え，M_{p1}, M_{p2} に上限値を設定し右辺のファジィネスについては荷重のあいまいさとしてすべて Pl の中に取り込んだ形になっている。$\{M_{i0}, M_{p1}, M_{p2}\}=\{(m_{i0}, d_{i0}), (m_{p1}, d_1), (m_{p2}, d_2)\}$，$(i=0,\cdots,5)$．また $(m_{i0}, d_{i0})=(\mu_{pl}, 0.2\mu_{pl})$ としている。式(14)のもとに式(15)を最大化するのであるが，

〈制約〉：

$$\left.\begin{array}{lllll} 4m_{p1} & & -4hd_1 & & \geq q \\ 2m_{p1} & +2m_{p2} & -2hd_1 & -2hd_2 & \geq q \\ 4m_{p1} & +2m_{p2} & -4hd_1 & -2hd_2 & \geq 1.2q \\ & 4m_{p2} & & -4hd_2 & \geq 0.8q \\ 2m_{p1} & +4m_{p2} & -2hd_1 & -4hd_2 & \geq 1.2q \\ 2m_{p1} & +4m_{p2} & -2hd_1 & -4hd_2 & \leq 1.6q \\ m_{p1} & & -hd_1 & & \leq 0.5+0.1h \\ & m_{p2} & & -hd_2 & \leq 0.5+0.1h \end{array}\right\} (14)$$

〈目標〉：$d_1+d_2 \rightarrow max.$ —(15)．ただし $q=\mu_{pl}+0.2h\mu_{pl}$．

この問題では $h=0.6$ として解 $(m_{p1}, d_1, m_{p2}, d_2)=(0.591, 0.519, 0.280, 0.0)$ が得られる。本計算例では，$h=0.6$ とするといった主観的判断が必要となる。