

長崎大学工学部 正員 岡林 隆敏
 明和設計(株) 正員 山崎 秀実
 長崎大学工学部 学生員 山手 弘之

1. はじめに 信頼性理論の進展に伴って、地震、風等の動的な解析ばかりでなく、道路橋に作用する活荷重、事務所、倉庫の活荷重及び雪荷重等の空間的に不規則に分布した荷重による応答の評価が必要になっている。動的な解析が一般に初期値問題になるのに対して、静的な不規則解析は、境界値問題になる。このような問題の解法としては、Green 関数⁽¹⁾⁽²⁾による方法、また、確率伝達マトリックス法⁽³⁾⁽⁴⁾による解法があるが、これらの解法は、はり状の構造物の解析に適しているが、複雑な骨組構造や板のような解析には限界がある。本論文ではこれらの問題の汎用的な解法として確率有限要素法を新たに提案し、本解法の精度を点検すると共に、いくつかの数値解析例を示した。確率有限要素法については、いくつかの方法が提案⁽⁵⁾⁽⁶⁾されているが、これらは材料定数及び境界条件が不確定な場合である。本研究は、外力が不確定であり、外力の確率特性が与えられた場合、応答の分散・共分散を解析する解法に関するものである。

2. 有限要素法の概要 節点変位と節点荷重を χ 及び P とすると、節点方程式は $K\chi = P$ (1)

で与えられる。ここに、 K は構造全体の剛性マトリックスである。この方程式は、境界条件の処理をした節点変位 χ^* と節点荷重 P^* を用いて、次式により解くことができる。 $K^*\chi^* = P^*$ (2)

ここに、 K^* は境界の処理をした剛性マトリックスである。

次に、図-1に示したように、座標変換マトリックス C_i により全体座標系を局所座標系に変換する。

$$\left. \begin{aligned} n_a^i &= C_i f_a^i, & n_b^i &= C_i f_b^i \\ \chi_a^i &= C_i u_a^i, & \chi_b^i &= C_i u_b^i \end{aligned} \right\} (3)$$

f_a^i , u_a^i は i 部材の断面力と変位である。部材剛性マトリックスと節点変位より断面力を求めることができる。

$$\begin{bmatrix} K_{aa}^i & K_{ab}^i \\ K_{ba}^i & K_{bb}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a^i \\ u_b^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a^i \\ f_b^i \end{bmatrix} (4)$$

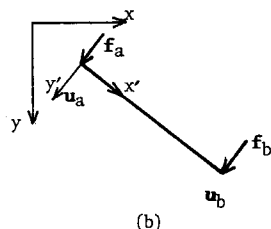
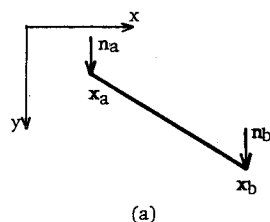


図-1 全体座標と局所座標

3. 確率有限要素法

(1)式において、外力 P が確率変数であると、変位 χ も確率変数になる。

(a) 平均値応答 $KE[\chi] = E[P]$ (5)

$E[\cdot]$ は平均値の演算子である。

(b) 分散・共分散応答 平均値回りの変動を $\sim$ の記号で表わすと

$$\tilde{\chi} = \chi - E[\chi], \quad \tilde{P} = P - E[P]$$

となる。 $\tilde{\chi}$ と $\tilde{P}$ の分散・共分散は、次式で関係づけられる。

$$KE[\tilde{\chi}\tilde{\chi}^T]K^T = E[\tilde{P}\tilde{P}^T] (6)$$

この式が確率有限要素法の基礎式となる。 i 部材と j 部材の変位と断面力及び断面力の分散・共分散は、次

式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E[\tilde{u}_a^i \tilde{u}_a^{iT}] &= C_i^T E[\tilde{\chi}_a^i \tilde{\chi}_a^{iT}] C_i \\ E[\tilde{f}_a^i \tilde{f}_a^{iT}] &= [K_{aa}^i \ K_{ab}^i] \left\{ \begin{aligned} &C_i^T E[\tilde{\chi}_a^i \tilde{\chi}_a^{iT}] C_i \\ &C_i^T E[\tilde{\chi}_b^i \tilde{\chi}_a^{iT}] C_i \end{aligned} \right\} \\ E[\tilde{u}_a^i \tilde{f}_a^{iT}] &= E[\tilde{f}_a^i \tilde{u}_a^{iT}]^T \\ E[\tilde{f}_a^i \tilde{f}_a^{iT}] &= [K_{aa}^i \ K_{ab}^i] \left\{ \begin{aligned} &C_i^T E[\tilde{\chi}_a^i \tilde{\chi}_a^{iT}] C_i \quad C_i^T E[\tilde{\chi}_b^i \tilde{\chi}_a^{iT}] C_i \\ &C_i^T E[\tilde{\chi}_a^i \tilde{\chi}_b^{iT}] C_i \quad C_i^T E[\tilde{\chi}_b^i \tilde{\chi}_b^{iT}] C_i \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} K_{aa}^{iT} \\ K_{ab}^{iT} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (7)$$

平均値応答は従来の有限要素法の考え方で処理できる。

外力 P の分散・共分散が与えられると、(4)(7)式により、応答の分散・共分散を得ることができる。

4. 荷重の分散・共分散行列

荷重の共分散行列は、 $E[\tilde{P}_i^2]$ と $E[\tilde{P}_i \tilde{P}_j]$ の要素より構成されている。

(a) 集中荷重の場合

$$E[\tilde{P}_i^2] = \sigma_i^2$$

$$E[\tilde{P}_i \tilde{P}_j] = \sigma_i \sigma_j r_{ij}$$

σ_i : i 節点に作用する荷重の標準

偏差, r_{ij} : i 節点と j 節点の荷重の空間的相関係数

(b) 分布荷重の場合 分布荷重を図-2のように集中荷重でモデル化

$$\text{する。 } \tilde{P}_i = \int_0^{a_l} \tilde{q}(x + l_i) dx \quad (8)$$

ここに、 a_l は分割した部材長。 $\tilde{P}_i$ と $\tilde{P}_j$ の共分散は、次式で与えられる。
 $E[\tilde{P}_i \tilde{P}_j] = \int_0^{a_l} \int_0^{a_l} E[\tilde{q}(x_1 + l_i) \tilde{q}(x_2 + l_j)] dx_1 dx_2 \quad (9)$

i) 白色雑音過程の場合 : $E[\tilde{q}(x_1) \tilde{q}(x_2)] = \sigma^2 \delta(x_1 - x_2)$

$$E[\tilde{P}_i^2] = \sigma^2 a_l, \quad E[\tilde{P}_i \tilde{P}_j] = 0 \quad (i \neq j) \quad (10)$$

ii) 相関を有する確率過程 : $E[\tilde{q}(x_1) \tilde{q}(x_2)] = \sigma^2 e^{-\beta |x_1 - x_2|}$

$$E[\tilde{P}_i^2] = 2\sigma^2 [a_l - (1 - e^{-\beta a_l})/\beta]$$

$$E[\tilde{P}_i \tilde{P}_j] = 2\sigma^2 [e^{-\beta |l_i - l_j|} (\cosh \beta a_l - 1)]/\beta$$

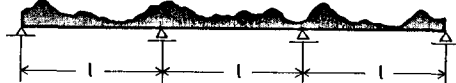


図-4 3 径間連続ばり

(11)

5. 数値計算と考察

図-3は単純ばりに白色雑音過程でモデル化された荷重が作用した場合の応答を示したものである。(a)(b)(c)はそれぞれたわみ、たわみ角、曲げモーメント及びせん断力の標準偏差の応答を、静的たわみの最大値で規格化した値で示した。実線は厳密解⁽³⁾であり、破線は、ばりを10分割した本解法の結果である。荷重のモデル化によるせん断力の不一致を除いて、両者は良い一致を示している。図-5は、相関のある外力が作用した3径間連続ばりの結果である。図中の K は、相関の減衰を表わすパラメータであり、(11)式の β とは

$$K = l\beta/2\pi$$

の関係にある。 $K \ll 1$ では等分布荷重の荷重強度が確率変数の場合であり、 $K \rightarrow \infty$ では分布荷重が白色雑音過程の場合に漸近する。最後に、外力の分散・共分散が与えられれば、本解法により不規則応答解析が効果的に実行できることが確認できた。

【参考文献】(1)ルジャニソフ著：構造物の信頼性解析、丸善、1980
 (2)高岡地：土木学会論文、No. 334、1983、(3)(4)岡林：土木学会論文 No. 316 No. 341、1981、1984、(5)中桐地：機械学会論文(A) Vol. 48、No. 427、昭57
 (6) E. Vanmarcke, ASCE, Vol. 105, EM. No. 5, 1983

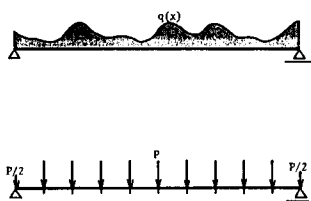


図-2 不規則分布荷重のモデル化

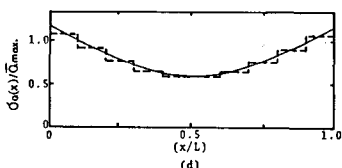
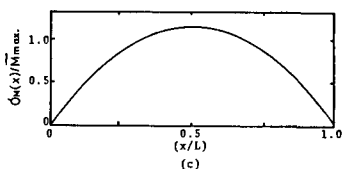
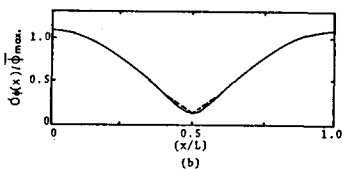
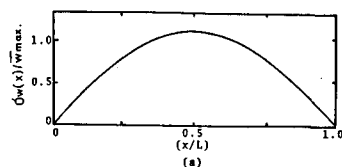


図-3 単純ばりの不規則応答 (10分割)

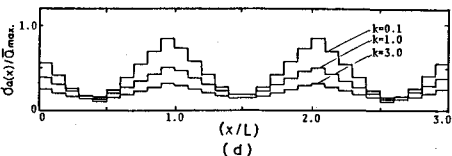
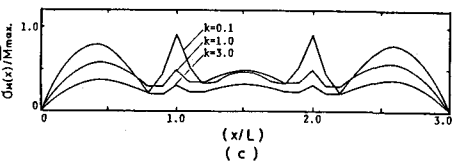
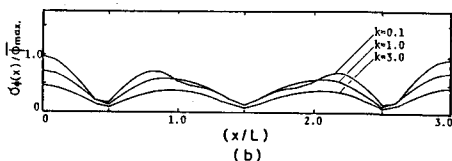
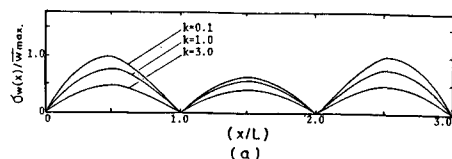


図-5 3 径間連続ばりの不規則応答