

東京大学 学生員 池田 豊 人
 関東学院大学 正員 佐藤 尚 次
 東京大学 正員 長谷川 彰 夫

1. はじめに 構造物の限界状態を表わす関数

$$Z_j = Z_j(\mathbf{X}) = 0 \quad j=1, 2, \dots, m \quad (1)$$

は、一般に非正規な設計変数 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ の非線形関数で与えられる。Cornell によって提唱された 2 次モーメントは Z が正規変数の線形関数であるとき厳密解を与える手法として位置づけられ、 Z の非線形性が誤差を生む要因となっている。しかし、理論的には式 (1) の Z に適当な数学的変換を施すことにより、これを「正規変数の非線形関数」もしくは「非正規変数の線形関数」に直すことができる。Rackwitz、あるいは長らによる修正 2 次モーメント法の手法は前者の系列に属すると考えられるが、非線形な破壊領域を線形領域で近似することによる誤差が避けられないほか、いわゆる、Hasofer-Lind 流の β を求めるための繰返し計算の複雑さも伴ってくる。そして、何より信頼性設計の手法を、旧来の設計実務の感覚から大きく隔たったものにしていく。筆者らの提案した超過確率を用いる手法は、非正規変数の線形関数に対し、ある程度の精度を期待し得るため、ここでは後者の系列の理論をより一般化することを試みる。ただし、各 X は全て独立とする。

2. 設計変数のグループ分けとランク分けによる非線形性処理 関数 Z は X を様々な形で含むが、その中の基本的なものについて考えてみる。まず、 X が単調かつ 1 対 1 対応の性質を持つ関数 $g(X)$ の形で含まれるとする。このとき、 $Y = g(X)$ に対し、設計値の超過確率

$$e_Y = \Pr[Y \leq Y^*] = \Pr[X \leq X^*] = e_X \quad (2)$$

が成り立つ。また、 $X_1 X_2 \dots X_n$ のような積の形で含まれる時、これを Y と書くことにし、

$$Y^L = \ln Y, \quad X_i^L = \ln X_i \quad \text{とおけば、}$$

$$Y^L = \sum_{i=1}^n X_i^L \quad (3)$$

となる。ここで、各変数 X_i が独立な対数正規分布に従うものとすれば、各 X_i^L および Y^L は正規分布する。そして、対数変換について式 (2) と同様な関係が成り立つことを考慮すれば、文献 2) より、

$$e_Y = \Phi \left[\frac{\sum_{i=1}^n -1(e_i) \sigma_{X_i^L}}{\left(\sum_{i=1}^n \sigma_{X_i^L}^2 \right)^{1/2}} \right] \quad (4)$$

さらに、 $\sigma_{X_i^L}^2 = \ln(1 + V_i^2)$ なる関係を用いると、

$$e_Y = \Phi \left[\frac{\sum_{i=1}^n \Phi^{-1}(e_i) \{\ln(1 + V_i^2)\}^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^n \ln(1 + V_i^2) \right)^{1/2}} \right] \quad (5)$$

ここで、 Φ は誤差関数、 $e_i = \Pr[X_i \leq X_i^*]$ 、 $\sigma_{X_i^L}^2$ は X_i^L の分散、 V_i は X_i の変動係数

限界状態関数を一般的な形で表現することは難しいが、1つの例として、限界状態関数が次の関数形で表わされる場合を考える。

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{i_j} s_{ij}(X_{ij}) \right) \quad (6)$$

ただし、関数 s_{ij} はすべて単調かつ 1 対 1 対応の性質を持つものとする。このとき、式 (6) を図 1 のように樹系に分解し、式表現のランク分けによって、各段階毎に下位の変数の超過確率から上位の変数の超過確率を求めていくことができる。すなわち、

$$P_{FD} = e_Z = \Pr[Z \leq Z^* = 0] = \Phi \left[\frac{\sum_{i=1}^n \Phi^{-1}(e_{Y1}) \sigma_{Y1}}{\left(\sum_{i=1}^n \sigma_{Y1}^2 \right)^{1/2}} \right] \quad (7)$$

および、

$$e_{Y1} = \Pr \left[Y_1 \leq Y_1^* = \prod_{j=1}^n s_{1j}(x_{1j}^*) \right] \quad (8)$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^n \Phi^{-1}(e_{x_{1i}}) (\ln(1 + v_{1i}^2))^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^n \ln(1 + v_{1i}^2) \right)^{1/2}} \right]$$

図 1

となる。式 (6) は、[積の和] という 2 段階のランク分けの例であるが、例えば、 $(X_1 + X_2)X_3 + (X_4 + X_5)X_6$ のような [和の積の和] なら 3 段階のランク分けをすることによって処理することができる。このように、対象とする関数の範囲を広げ、ランク分けの数を増やし、和のグループ、積のグループ、関数等に対し適宜、変換式を用いることにより、相当広範な範囲の限界状態関数に対し、 P_{fd} と、最も基本的な確率変数の設計値の超過確率との近似関係を求めることができる。ただし、この手法は、分布形に対する近似の操作を繰り返して行なうため、その結果、誤差が累積する可能性がある。

3. 数値計算例 前節の定式化の具体的計算例として、長が鋼材断面の曲げ破壊を表わす破壊基準関数としてあたえた、

$$Z(X) = X_1 X_2 X_3 - X_4 X_5 \quad (9)$$

に対し、 P_{fd} を求める。長は、モンテカルロ法を用いて、破壊確率を計算している。ここでは、 $X_1 \sim X_5$ について様々な分布形の組み合わせとパラメータに対し、式 (7) (8) を用いて P_{fd} を求め、長の計算した P_{fr} と対比した。設定した分布形、パラメータの組み合わせ、および計算結果を図 2 に示した。 P_{fd} の計算に対しては、簡単のため、 $e_1 = e_2 = e_3$ 、 $e_4 = e_5$ とした。ここで、

$$e_i = \begin{cases} \Pr [X_i \leq X_i^*] & (i=1, 2, 3) \\ \Pr [X_i \geq X_i^*] & (i=4, 5) \end{cases} \quad (10)$$

結果を見ると $X_1 \sim X_3$ が対数正規分布する場合以外は P_{fd} と P_{fr} の対応は良好であるが、対数正規分布の場合はかなりの誤差が見られる。

4. 現行設計との対比 ところで、現行の設計は、関与する変数を強度と荷重効果の 2 つにグループ分けし、それぞれについての寄与をまとめて R と S として表わしていると考えられる。すなわち、

$$\begin{aligned} R &= R(x_1, x_2, \dots, x_{nr}) \\ S &= S(s_1, s_2, \dots, s_{ns}) \end{aligned} \quad (11)$$

実際の設計の場では、データから陽な形で統計的な情報が得られるのは、各 x_i, s_i についてであり、それをもとに、特性値 R^*, S^* が、構造解析等により決定論的に求められる。しかし、破壊確率に直接関係するのは、 R^*, S^* に対応する超過確率 e_R, e_S である。すなわち、設計は、図 3 に示すような 2 段の樹系の論理構造を形成しており、ここで、提案した手法は、この樹系図の下の方の変数の特性値の超過確率から、上の方の変数の特性値の超過確率を推定する手法と概念的に対応づけられる。現行の設計は、暗黙のうちに、 $Z = R - S$ という線形の限界状態関数を考えていると解釈し得るが、これは本研究の提案と極めて整合性が高いといえることができる。

参考文献 1) 長尚；安全性指標に関する若干の考察、土木学会論文報告集第 324 号、1982 年 8 月
2) 西野、佐藤、長谷川、井上、超過確率に基づく構造設計の確率論的基礎、土木学会論文集、350 号、1984 年 10 月

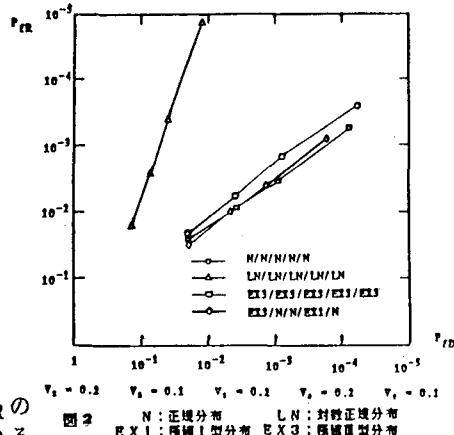


図 2

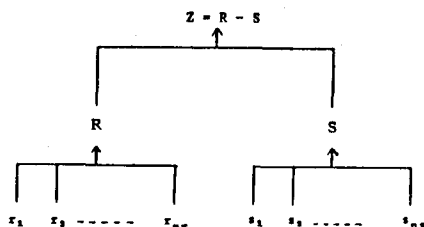


図 3 設計計算の概念図