I-122　　非正規相関システムの信頼性解析

東京大学工学部　　学生員　○山本　貞明
東京大学工学部　　正　員　　藤野　陽三
東京大学工学部　　正　員　　伊藤　学

1．まえがき

安全性に影響を及ぼす強度や荷重の個々の要素が，相関性を持ち，なおかつそれらの確率変数が非正規分布をなす場合が，多々ある。（例えば，海洋構造物に作用する風荷重と波浪荷重，あるいは空間的に分布する風荷重など）そのために，相関性を有する非正規確率変数から，安全性の尺度となる安全性指標（β）または，破壊確率（P_f）を求める必要性が生じてくる。しかし，一般的な解析手法では，計算が面倒であり多変数においては，ほとんど不可能であるため，正規化変換を用いた近似手法による信頼性解析を行った。

2．解析理論

従来の解析手法では，相関性を有する非正規確率変数｛X1, X2,………｝から安全性指標（β）を求めるには，まず対角化を行って独立な変数｛U，V，………｝に変数変換する。次に，その新しい変数の分布関数を求めて，それを基にN(0，1)の変数｛U*，V*，………｝に変数変換してからβを求める。しかし，この方法では｛U，V，………｝の分布関数を求める際｛X1, X2,………｝が非正規確率変数のために結合確率密度関数を求めることが難しく，たたみ込み積分などの計算を必要とし大変にやっかいである。この面倒な計算をしなくて済み，かつ多変数においても容易にβを求めることができる解析手法が正規化変換手法を用いた信頼性解析（近似手法）である。この方法は非正規確率変数｛X1, X2,………｝をN(0，1)の新しい変数｛X1*，X2*，………｝に正規化変換を行った後に，上記と同様に対角化を行ない，そのあと，N(0，1)の変数に変数変換をしてからβを求める。ここで，正規化変換においては$\rho \fallingdotseq \rho^*$と仮定する。（$\rho$；非正規分布における相関係数，$\rho^*$；N(0，1)における相関係数）この方法によれば対角化後の変数の分布関数はN(0，1)の線形結合より，正規分布となりβ，P_fは簡単に求められる。

3．正規化変換による相関係数の変化

まず正規化変換で用いた$\rho \fallingdotseq \rho^*$の仮定が正しいかどうか2変数について実際に計算してみた。用いた分布型は①正規分布②対数正規分布，③極値Ⅰ型，④極値Ⅱ型，⑤極値Ⅲ型の5つで適宜2つを組み合わせた。ただし，すべての分布の平均は1標準偏差は0.1とした。

$$\rho = \frac{\sigma_{x_1, x_2}}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}$$

$$\sigma_{x_1, x_2} = \iint (x_1 - \mu)(x_2 - \mu) f_{1,2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

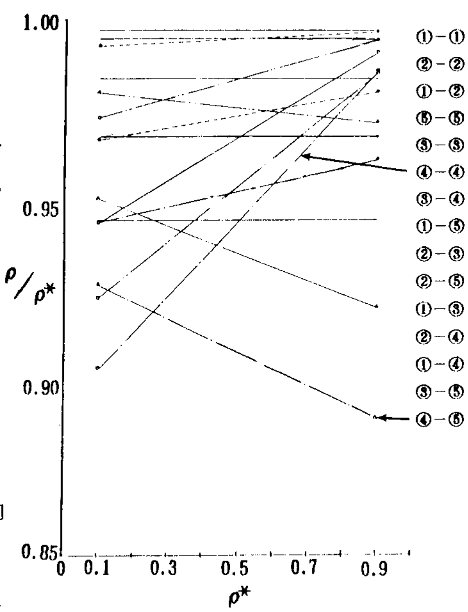
$$\mu_{x_1} = \mu_{x_2} = 1.0 \qquad \sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = 0.10$$

から結合確率密度関数[1]を与える式

$$f_{1,2}(x_1, x_2) = \frac{f_1(X) f_2(x)}{\sqrt{1-\rho^{*2}}} \cdot \exp\left[-\frac{\rho^*}{2(1-\rho^{*2})}\{\rho^*(y_1^2+y_2^2) - 2y_1y_2\}\right]$$

$$y_i = \Phi^{-1} \cdot F_{x_i}(x) \qquad f_i(x)\ ;\ \text{P.D.F.} \qquad F_{x_i}(x)\ ;\ \text{C.D.F.}$$

を使って数値積分してρを求めた。ρ^*の値は，0.1，0.3，0.5，0.7，0.9の5つの場合を取り上げた。結果を図—1に示した。



ρ/ρ^*の値は，ほとんどが，0.9 以上となり$\rho \doteqdot \rho^*$の仮定が妥当であることが言える。

そこで次に，この仮定に最もはずれている④極値Ⅱ型―④極値Ⅱ型における相関係数の小さい場合と，④極値Ⅱ型―⑤極値Ⅲ型における相関係数大きい場合の２つのケースについて，厳密解とどの程度異なっているか実際に計算し比較してみた。

4．近似解および厳密解の比較

破壊基準関数を

$$Z = X1 - X2 \begin{cases} \leq 0 & \text{危険} \\ > 0 & \text{安全} \end{cases}$$

とし$\mu_{x1}=1.5$, $\sigma_{x1}=0.15$, $\mu_{x2}=1.0$, $\sigma_{x2}=0.10$と定義した。X1およびX2が正規分布の場合$\rho=0$の時$\beta=2.77$, $P_f=0.42\times10^{-2}$である。④－④においては$\rho=0.09035(\rho^*=0.100)$，④－⑤においては，$\rho=0.79914(\rho^*=0.900)$とした。

正規化変換を用いた近似解法によると破壊基準関数は最終的に

$$Z = F_{X1}^{-1}\cdot\Phi\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+\rho}\,U^*+\sqrt{1-\rho}\,V^*)-F_{X2}^{-1}\cdot\Phi\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+\rho}\,U^*-\sqrt{1-\rho}\,V^*)\right]$$

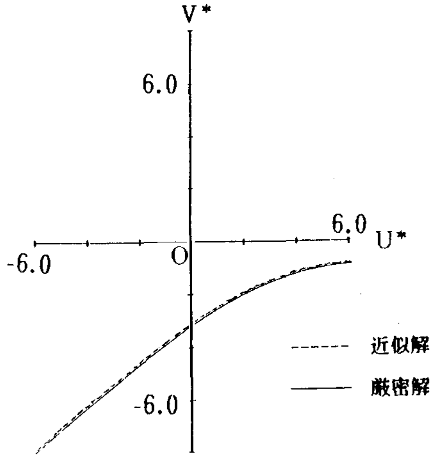
となり，パラメータｘを使うと

$$U^*=\frac{1}{\sqrt{2(1+\rho)}}\left(\Phi^{-1}\cdot F_{X1}(x)+\Phi^{-1}\cdot F_{X1}(x)\right)$$

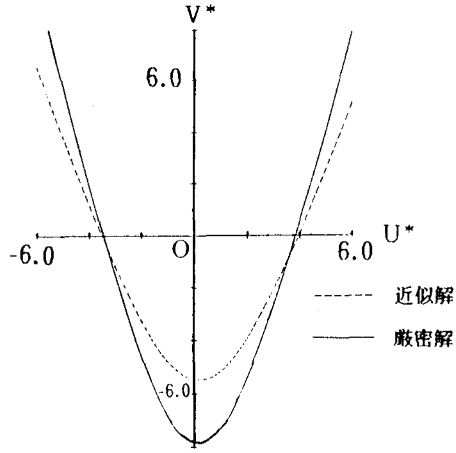
$$V^*=\frac{1}{\sqrt{2(1-\rho)}}\left(\Phi^{-1}\cdot F_{X1}(x)-\Phi^{-1}\cdot F_{X1}(x)\right)$$

となり$\sqrt{u^{*2}+v^{*2}}$の最小値がβ^*の値である。④－④においては$\beta^*=2.697(P^*_f=0.319\times10^{-2})$，④－⑤においては$\beta^*=3.252(P^*_f=0.727\times10^{-3})$，となった。$\beta$の厳密解を求めると，④－④において，$\beta=2.706(P_f=0.311\times10^{-2})$，④－⑤においては$\beta=3.320(P_f=0.516\times10^{-3})$，となった。図―2 には④－④におけるU*，V*の標準正規空間における近似解法および厳密解法による破壊基準関数を，図―3 には④－⑤における近似解法および厳密解法による破壊基準関数を示した。

これらの結果より，一番精度の悪い上記の④－④，④－⑤の場合でもβ^*は非常に厳密解に近い値を示し，その値は常に安全側の値であることがわかった。この正規化変数手法を用いたシステム信頼性解析は，実用性のある非常に有効な方法であると言える。



図―2　④－④における破壊基準関数



図―3　④－⑤における破壊基準関数

参考文献　1)Mircea Grigoriu : Crossing of Non-Gaussian Translation Process, ASCE,EM4,1984