I-121　相関がある場合の安全性指標

信州大学工学部　正　員　長　　尚

1．まえがき

破壊基準関数を構成している変数間に相関があったり，破壊基準関数が複数個あり式間に相関がある場合の安全性指標β（本文では個々の確率変数の確率分布の形を考慮に入れた全確率分布安全性指標を対象とする）の計算にはこれらの相関を考慮する必要がある。個々の変数の確率分布と破壊基準関数の関連でこれまでに解かれているケースを表－1に○，◎（破壊確率と完全に対応）印で示す。本文では残りのケースすべても対象にした解法，すなわち確率変数の中に非正規変数を含み，かつ非線形な破壊基準関数が複数個ある場合の解法について提案し計算例を示す。また相関のある非正規変数を乱数によって発生させる近似法について提案し，これを利用して安全性指標について吟味する。

表－1

破壊基準関数		個々の確率変数の確率分布			
		正規変数のみ		非正規変数を含む	
個数	形	変数間に相関なし	変数間に相関あり	変数間に相関なし	変数間に相関あり
単一	線　形	◎ SL1	◎ SL2	○ SL3	○ SL4
	非線形	○ SN1	○ SN2	○ SN3	○ SN4
複数	線　形	○ PL1	○ PL2	○ PL3	PL4
	非線形	○ PN1	PN2	PN3	PN4

2．解法

破壊基準関数が複数（m）個ある場合のシステムとしての安全性指標の範囲（β_L～β_U）は1979年にKounias,Hunterの導いた次の式を利用する。　$\beta_L=\Phi^{-1}(p_U)$ ・・・（1）　$\beta_U=\Phi^{-1}(p_L)$ ・・・（2）　ここに，$p_L=\sum_{k=1}^{m}\{p_k-\sum_{l=1}^{k-1}p_{kl}\}\geqq p_1$ ・・・（3），$p_U=\sum_{k=1}^{m}p_k-\sum_{k=2}^{m}\max_{l<k-1}p_{kl}\geqq p_L$ ・・・（4），$p_k=\Phi(-\beta_k)$ ・・・（5），$p_1=\max p_k$ ・・・（6），p_{kl}：モードkと1の同時破壊確率，Φ：標準化正規変数の分布関数，である。モードkと1の同時破壊確率p_{kl}については，1979年にDitlevsen が提案した方法を若干簡略化した次式を用いる。$p_{kl}=\alpha_P\{P(A)+P(B)\}\geqq\max[P(A),P(B)]$（$\rho_{kl}>0$のとき），$\alpha_N\{\min[P(A),P(B)]\}$（$\rho_{kl}<0$のとき）・・・（7）　ここに，$P(A)=\Phi(-\beta_k)\Phi\{-(\beta_l-\rho_{kl}\beta_k)/\sqrt{1-\rho_{kl}^2}\}$ ・・・（8），$P(B)=\Phi(-\beta_l)\Phi\{-(\beta_k-\rho_{kl}\beta_l)/\sqrt{1-\rho_{kl}^3}\}$ ・・・（9），$\alpha_P=(1-\cos\rho'_{kl}/\pi)$ ・・・（10），$\alpha_N=2\alpha_P$ ・・・（11），$\rho'_{kl}=\rho_{kl}^{q}$（$\rho_{kl}>0$のとき），$-|\rho_{kl}|^{q}$（$\rho_{kl}<0$のとき）（12），$q=\rho_{kl}^2-2.5|\rho_{kl}|+2$ ・・・（13），ρ_{kl}：モードkと1間の相関係数，である。すべての変数が正規変数で破壊基準関数がすべて線形の場合には，相関係数ρ_{kl}は次の式から求めることができる。$\rho_{kl}=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^k a_j^l\rho_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j})/\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^k a_j^k\rho_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j})(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^l a_j^l\rho_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j})}$ ・・・（14）　ここに，a_i^k，a_j^l：k，1破壊基準関数のx_i，x_jの係数，σ_{x_i}，σ_{x_j}：x_i，x_jの標準偏差，ρ_{ij}：x_i，x_j間の相関係数，である。これを次のように拡張して使用する。　$\rho_{kl}=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^{ck}a_j^{cl}\rho_{ij}\sigma_{x_i}^{ck}\sigma_{x_j}^{cl})/\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^{ck}a_j^{ck}\rho_{ij}\sigma_{x_i}^{ck}\sigma_{x_j}^{ck})(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^{cl}a_j^{cl}\rho_{ij}\sigma_{x_i}^{cl}\sigma_{x_j}^{cl})}$ ・・・（15）　ここに，a_i^{ck}，a_j^{cl}：線形化されたk，1破壊基準関数のx_i，x_jの係数，$\sigma_{x_i}^{ck}$，$\sigma_{x_j}^{cl}$：Rackwitz,Fieβler の提案した近似正規分布x_i^N，x_j^Nの標準偏差，である。変数の中に非正規変数が含まれる場合とか，非線形な破壊基準関数がある場合には，この式（15）は厳密には成立しない。何故ならば，モードが異なると同じ変数でも

正規分布に換算している点が違うので，平均値と標準偏差が異なり，モードkと1を同じ標準化空間に変換できないからである。しかし近似式としては利用できるものとする。なお個々のモードの安全性指標の計算には，相関係数ρを固有値問題として解かなくて済む次式を用いる。 $\beta_k = (a_0^{*k} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{*k} \overline{x}_i^{*k}) / \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^{*k} a_j^{*k} \rho_{ij} \sigma_{z_i}^{*k} \sigma_{z_j}^{*k}}$ ・・・ (16)

2. 相関のある非正規乱数のつくり方

いま標準化正規変数を$\mathbf{z}$とし，これを乱数で発生させると，相関のある多変数正規乱数は，次のように得られる。 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\,\mathbf{z} + \overline{\mathbf{x}}$ ・・・ (17) ここに，$\mathbf{C}$：変換マトリックス，$\overline{\mathbf{x}}$：変数$\mathbf{x}$の平均値，である。この変換マトリックス$\mathbf{C}$は相関係数ρを固有値問題として解いて求めるか，あるいはもっと簡単な手順で求める方法が開発されている。ところで変数間に相関がある任意分布に従う変数を乱数で発生させる方法はまだ開発されていない。そこでここでは，相関だけは正規分布と同じとみなして，上記の方法を利用した近似的な方法について述べる。いま，任意確率分布の分布関数をF_iとし，変数間に相関がないものとすると，標準化正規乱数z_iを用いて，次式から変数x_iを作ることができる。 $x_i = F_i^{-1}[\Phi(z_i)]$ ・・・ (18) ここで，すべての変数は相関のある正規分布で，結合確率分布も正規分布と考えると，正規乱数は式 (17) により求められる。これに対する標準化変数$\mathbf{z}'$は $\mathbf{C}\,\mathbf{z} = \sigma_x \mathbf{z}'$ ・・・ (19) の関係から，$\mathbf{z}' = \sigma_x^{-1} \mathbf{C}\,\mathbf{z}$ ・・・ (20) となる。このz_i'を式 (18) のz_iの代わりに用いると，相関だけは正規分布と同じとみなした，近似的な相関のある任意確率分布乱数が得られる。この方法の有効性をみるために実施した例題の一つを挙げる。 x_1(正規分布，平均値＝360 ，変動係数＝0.15)，x_2(ワイブル分布，平均値＝480 ，変動係数＝0.15，下限値＝336)，x_3(対数正規分布，平均値＝100 ，変動係数＝0.10)，x_4(極値Ｉ型，平均値＝50，変動係数＝0.30)，相関係数（$\rho_{ii}=1.0$ ，$\rho_{12}=-0.5$，$\rho_{13}=0.2$ ，$\rho_{14}=0.1$ ，$\rho_{23}=0.4$ ，$\rho_{24}=-0.2$，$\rho_{34}=0.5$ ）の例について１万組の乱数を発生させた結果は次の通りである。$\overline{\mathbf{x}}$＝ (360.0 , 480.2 , 100.1 , 50.0)，$\mathbf{V}$＝ (0.15, 0.15, 0.10, 0.30)，$\rho_{ii}=1.0$ ，$\rho_{12}=-0.49$，$\rho_{13}=0.2$ ，$\rho_{14}=0.1$ ，$\rho_{23}=0.41$，$\rho_{24}=-0.18$，$\rho_{34}=0.49$ この他の例題でも各確率分布のパラメータ及び相関の条件はこの例と同じように満たされている。ただしこれで結合確率分布の条件を満たすとは言えないので，厳密性に欠けるが，実用的には十分使用に耐えるのではないかと思う。

4. 計算例

まず表－１のPL4 に当たる，高さ15，スパン20の門形ラーメンの破壊の例題を示す。x_1 ，x_2 は柱及びはりの全塑性モーメント，x_3 ，x_4 ははり中央の垂直力及び柱上部の水平力である。破壊基準関数は次の８個である。$g_1 = 4x_1+2x_2-10x_3-15x_4$ ，$g_2 = 4x_1-15x_4$，$g_3 = 2x_1+4x_2-10x_3-15x_4$ ，$g_4 = 3x_1+x_2-15x_4$ ，$g_5 = 4x_2-10x_3$，$g_6 = 2x_1+2x_2-15x_4$，$g_7 = x_1+3x_2-10x_3$ ，$g_8 = 2x_1+2x_2-10x_3$ 平均値，変動係数は前項の例題と同じで，確率分布もx_1(ワイブル分布，下限値＝90)，x_2(ワイブル分布，下限値＝120) 以外は同じである。相関係数は$\rho_{ii}=1.0$ ，$\rho_{12}=0.5$ ，$\rho_{34}=0.8$ である。計算結果は次の通りである。なお ( ) 中は前項の方法によるシミュレーション結果である。$\beta_1 = 1.51(1.42)$，$\beta_2 = 2.04(1.98)$，$\beta_3 = 1.85(1.77)$，$\beta_4 = 2.32(2.27)$，$\beta_5 = 2.78(2.77)$，$\beta_6 = 2.54(2.49)$，$\beta_7 = 2.77(2.77)$，$\beta_8 = 2.62(2.62)$，$\beta_L \sim \beta_U = 1.47 \sim 1.51(1.41)$ シミュレーション結果と多少のずれがあるが，安全性指標の性格を考えると十分な結果であると言えよう。なお変数がすべて正規分布の場合は両者は完全に一致する。またこの例において，変数間に相関がない場合は$\beta_L \sim \beta_U = 1.69 \sim 1.83(1.63)$となる。次は表－１のPN4 に当たる，はりの曲げとせん断破壊の問題で，変数が10個，破壊基準関数が次の２個，$g_1 = x_1x_2x_3-(x_4+x_5)x_6$ ，$g_2 = x_7x_8x_9-(\alpha x_4+x_{10})x_6$，確率分布は，$x_2$ ，x_3 ，x_4 ，x_6 ，x_8 ，x_9 が正規分布，x_1 ，x_7 がワイブル分布，x_5，x_{10}が対数正規分布の３種類の問題である。平均値，変動係数，相関係数は，$\overline{\mathbf{x}}$＝ (2800,525.5,1,2.5,7.5,1,1600,14.08,1,12) ，$\mathbf{V}$＝ (0.05,0.01,0.1,0.05,0.25,0.2,0.05,0.01,0.1,0.25) ，$\rho_{ii}=1.0$ ，$\rho_{17}=0.8$ ，$\rho_{24}=0.4$ ，$\rho_{28}=\rho_{48}=0.2$ ，$\rho_{39}=\rho_{56}=0.9$ である。結果を記すと，β_1(曲げ破壊) ＝1.43(1.42)，β_2(せん断破壊) ＝1.56(1.55)，β (全体) ＝1.35(1.35)である。