

セニチリリカー・セニチリ(株) 正員 渡辺隆之

## 1. 系 言

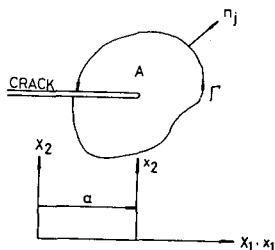
き裂先端に大規模な塑性変形が生ずるような破壊に適用される非線形破壊力学パラメータとしては、Rice<sup>(1)</sup>の提案したJ積分がある。このJ積分は、変形塑性理論にしたがう弾塑性体のき裂先端にかけられる応力の特異性の強さを表し、かつ積分経路に依存しないため有効な破壊力学パラメータであると考へられる。しかし、これは物体力や熱ひずみなどの存在する場合、あるいはひずみ増分理論にしたがう弾塑性体に対する応用にあっては、経路独立性が失われ適用において限界が生じる。そのためJ積分の適用限界を拡張したパラメータとして、J積分が提案されている<sup>(2)</sup>。J積分は、物体力や熱ひずみの効果を考慮し増分理論にしたがう弾塑性体に対して適用できる、非線形破壊力学パラメータとなっている。

本論文では、仮想き裂進展法を用いたJおよびJ積分の評価する方法について示す。

## 2. 仮想き裂進展法による評価式

## 2.1 J積分の評価法

図1に示すように、固定座標系 $x_1, x_2$ とき裂先端とともに移動する移動座標系 $x_1, x_2$ を考へる。このとき、き裂長さ $a$ とし、き裂が $\Delta a$ だけ進展した場合を考へる。ここでは物体力とき裂面の圧力を無視する。Riceは、 $\Delta a \rightarrow 0$ の極限としてJ積分を定義している。この定義より、J積分は次式のように表される。

図1 座標系と積分経路 $\Gamma$ 

$$J = \int_{\Gamma} T_i \frac{du_i}{da} d\Gamma - \int_A \frac{dw}{da} dA \quad (1)$$

ここで、 $T_i$ は表面力、 $u_i$ は変位、 $w$ はひずみエネルギー密度、 $\Gamma$ は積分経路、 $A$ は $\Gamma$ に囲まれた面積である。 $x_1, x_2$ 系と $x_1, x_2$ 系との間の関係は $x_1 = x_1 - a$ 、 $x_2 = x_2$ と表すと、式(1)の微分関係は次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{du_i(x_1, x_2, a)}{da} &= \frac{\partial u_i(x_1, x_2, a)}{\partial a} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a} \\ &= \frac{\partial u_i(x_1, x_2, a)}{\partial a} \end{aligned} \quad (2)$$

これより、Riceによつて与えられたJ積分式は、式(2)の中項を式(1)に代入することによつて得られることは、よく知られている。しかし、ここで式(2)の右辺項を式(1)に代入し、固定座標系で表す。

$$J = \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} d\Gamma - \int_A \frac{\partial w}{\partial a} dA \quad (3)$$

ここで、ひずみエネルギー密度 $w$ は、次式で表される。

$$w = w(\epsilon_{ij}) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (4)$$

ただし、 $\sigma_{ij}$ と $\epsilon_{ij}$ は応力とひずみテンソルである。次に、一定荷重条件のもとで式(3)を考へる。経路 $\Gamma$ 上で表面力 $T_i$ は一定とし、積分経路 $\Gamma$ と $A$ は変化しない仮定する。 $\partial u_i / \partial a$ と $\partial w / \partial a$ は、積分領域内で連続であると仮定し、微小な仮想き裂進展量 $\Delta a$ を式(3)の両辺に乗ずると、次式が得られる。

$$J \Delta a = \frac{\partial}{\partial a} \int_{\Gamma} T_i u_i d\Gamma \Delta a - \frac{\partial}{\partial a} \int_A w dA \Delta a \quad (5)$$

上式において、き裂進展力学的仮想仕事( $J \Delta a$ )は、外部仕事の仮想増分と内部仕事の仮想増分の差に等しくなっていることが解釈できる。

これより図2を参照するとともに式(5)を用いて、仮想き裂進展法の表示式を求めた。図2(a)は、き裂先端を囲む経路 $\Gamma$ と半径 $r$ を有する経路 $\Gamma_1$ を示している。図2(b)は、経路 $\Gamma$ を不変としき裂先端を仮想的に $\Delta a$ だけ進展せよとすると、 $\Gamma_1$ に囲まれた領域も同時に平行

移動させた状態を示している。図2(a)より式(5)は、 $A = A_1 + A_2$ とすると、次式のように表わされる。

$$JSA = \frac{\partial}{\partial a} \int_{\Gamma} T_i u_i d\Gamma dA - \frac{\partial}{\partial a} \int_{A_1+A_2} w dA dA \quad (6)$$

次に、経路 $\Gamma$ 上の変位 $u_i$ を固定し、図2(b)のように $\Gamma$ に囲まれる領域 $A_1$ を裂き $A_2$ と $A_1$ を分離し、 $A_2$ を $A_1$ の進展方向に平行移動させると式(6)は、

$$JSA = - \int_{A_1} \frac{\partial w}{\partial a} dA \left| \frac{dA_1}{dA_0} \right| dA_1 - \int_{A_2} w \frac{\partial |dA_1/dA_1|}{\partial a} dA dA_1 \quad (7)$$

となる。ここで、仮定より $\Gamma$ 上 $\partial u_i / \partial a = 0$ 、 $\partial |dA_1/dA_1| / \partial a = 0$ と仮定した。また $J$ 積分の仮定より領域 $A_2$ 上 $(\partial w / \partial a) dA = 0$ 、 $(\partial |dA_2/dA_2| / \partial a) dA = 0$ と仮定する。上式において $|dA_1/dA_1|$ は、ヤコビアン行列式である。式(7)は、仮想き裂進展法を用いた $J$ 積分の評価式となっており、ポテンシャルエネルギーを定義した上で評価式が導き出されたと示している。また $J$ 積分の評価する場合、経路積分法と仮想き裂進展法による評価法は、同じ式から出発してそれぞれ評価式が得られることを示している。

## 2.2 $J$ 積分の評価法

$J$ 積分は、塑性変形・物体力・温度場などを考慮した非線形破壊力学パラメータとして提案されている<sup>(2)</sup>。図3に示したように、き裂先端に付いた固定座標系 $O-x_1, x_2$ の原点 $O$ が $\delta$ で仮想的にき裂の微小長さ $\delta$ を進展する場合を考へ、進展後のき裂先端を原点とする移動座標系 $O'-x_1, x_2$ として、エネルギー保存則に基づき次式を導く。

$$\int_{\Gamma} T_i \frac{du_i}{da} d\Gamma + \int_A F_i \frac{du_i}{da} dA = \int_A \sigma_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{da} dA + \hat{J} \quad (8)$$

ここで、 $F_i$ は物体力である。破壊が進行する微小領域

と慣性力項は、簡単のため無視した。両座標系間の関係は、次式のようになる。

$$x_1 = X_1 \cos \theta + X_2 \sin \theta - a \quad (9a)$$

$$x_2 = -X_1 \sin \theta + X_2 \cos \theta \quad (9b)$$

これより $\epsilon_{ij}$ が弾性 $\epsilon_{ij}^e$ 、塑性 $\epsilon_{ij}^p$ 、熱 $\epsilon_{ij}^t$ に $\epsilon_{ij}$ を分解できるとすると、次式で表わされる。

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p + \epsilon_{ij}^t = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^m \quad (10)$$

次に、 $\epsilon_{ij}$ をエネルギー密度 $w$ は、弾性成分と非弾性成分に分解できるとすると、次式が導かれる。

$$w = w^e + w^m = \int_0^{\epsilon_{ij}^e} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^e + \int_0^{\epsilon_{ij}^m} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^m \quad (11)$$

ここで、 $\epsilon_{ij}^e = 0$ のとき $w^m$ は、塑性 $\epsilon_{ij}^p$ と熱 $\epsilon_{ij}^t$ のエネルギー密度 $w^m$ となる。これよりき裂長さ $a$ による $w$ の微分は、 $\sigma_{ij}$ が一変という仮定と式(11)より次のように表わされる。

$$\frac{\partial w}{\partial a} = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^e}{\partial a} + \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^m}{\partial a} \quad (12)$$

これより、式(9)~(12)を考慮し2.1節と同様に式(8)を変形すると、仮想き裂進展法による $J$ 積分の評価式が次のように得られる(図4参照)。

$$\begin{aligned} \hat{J}SA &= \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} d\Gamma \left| \frac{d\Gamma_1}{d\Gamma_0} \right| d\Gamma_1 + \int_{\Gamma} T_i u_i \frac{\partial |d\Gamma_1/d\Gamma_1|}{\partial a} d\Gamma d\Gamma_1 \\ &+ \int_A F_i \frac{\partial u_i}{\partial a} dA \left| \frac{dA}{dA_0} \right| dA_0 + \int_A F_i u_i \frac{\partial |dA_1/dA_1|}{\partial a} dA dA_1 - \\ &\int_A \left( \sigma_{ij} \left( \frac{\partial \epsilon_{ij}^e}{\partial a} + \frac{\partial \epsilon_{ij}^m}{\partial a} \right) \right) dA \left| \frac{dA}{dA_0} \right| dA_0 - \int_{A_1} (w^e + w^m) \frac{\partial |dA_1/dA_1|}{\partial a} dA dA_1 \end{aligned} \quad (13)$$

## (参考文献)

- (1) Rice, J.R., J. Appl. Mech., Vol. 35 (1968) pp. 379.
- (2) 岸本 邦夫 2 著, 機軸, Vol. 46-4/10(A) (1985) pp. 1049.

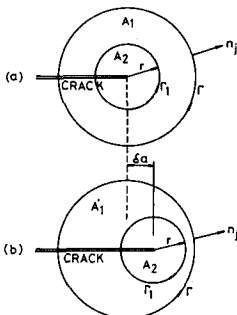


図2 仮想き裂進展法

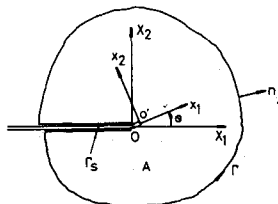


図3 き裂進展時のエネルギー平衡を考へる領域

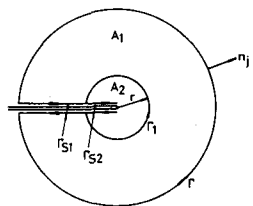


図4  $J$ 積分の仮想き裂進展法