

東京大学 学生員 松 野 徹
 東京大学 正員 長谷川 彰 夫
 東京大学 Dellelegne Teshome

1. まえがき 円弧部材に作用する荷重の方向には、様々なものが考えられる。重力のように、常に鉛直下向きに作用するもの、水圧のように常に面に垂直に作用するものなど、これらの荷重方向の変化は座屈現象になんらかの影響を与える。ところが座屈解析を行なう際、ふつう用いられる有限要素解析では、その基本になる現在の、直線の梁-柱の剛性方程式が、荷重の方向を一定として扱っているために、水圧など変位の前後で荷重の方向が変化する問題を扱うことができない。そこで、線形化有限変位理論に対する仮想仕事の定理を用いて、荷重の方向を考慮した梁-柱の剛性方程式を導く。そして、これを用いることにより、リング及びアーチにおいて幾つかの荷重条件下での面内座屈の解析を行ない、その結果から、古典的な既存解の検証を行なうとともに、分布荷重の方向の影響を調べる。

2. モデルの設定 本研究では、Fig. 1 に示すように、リング及びアーチについて、荷重条件の異なる5つのモデルを設定した。すなわち、

(a) 活荷重型荷重：初期状態において、分布荷重は水平軸に沿って一様に、鉛直下向きに分布し、変形後も荷重の方向は変化しない。

(b) 死荷重型荷重：初期状態において、分布荷重は円弧軸に沿って一様に、鉛直下向きに分布し、変形後も荷重の方向は変化しない。

(c) 横力：初期状態において、分布荷重は中心方向を向いており、変形後も荷重の方向は変化しない。

(d) 水圧：荷重は常に軸に垂直にかかる。そのため、変形により荷重の方向は変化する。

(e) 中心方向荷重：荷重は常に円弧中心を向く。要素についてみると、変形により荷重の方向は変化している。

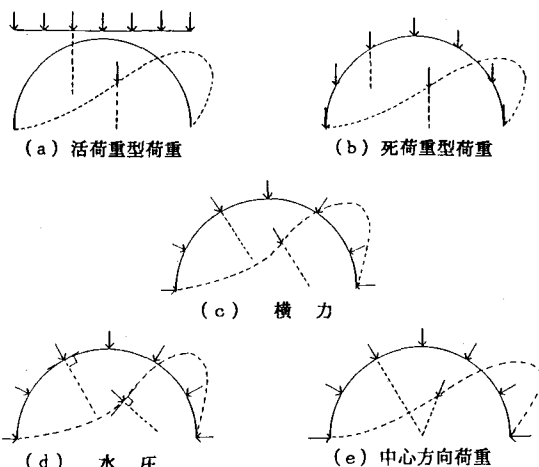


Fig. 1 荷重条件

3. 既存解 リング及び円弧アーチについては、幾つかの既存解がある。^{1) 2) 3)} リングについては、初期状態で分布荷重がリング中心を向いているが、変形後の荷重方向が異なる、横力、水圧、中心方向荷重、それぞれの場合につき既存解がある。円弧アーチについては同様な初期状態において、横力についての解と、変形後の荷重の方向が特定出来ない解とがある。これらの既存解は、座屈荷重を次のような式で、表わしている。

$$q_{cr} = \gamma \frac{EI}{R^3}$$

ここで EI は曲げ剛性、 R は円弧半径であり、 γ は座屈係数で、荷重条件により異なる。このような既存解は比較的古い時期に、一定の制約のもとで解析的に求められたもので、その誘導過程には不明な点もあり、過去の検証も不十分で、必ずしも信頼し得るものではない。

4. 剛性方程式の誘導 有限要素解析の基本となる現在の剛性方程式では、荷重の方向が、変位に伴い、変化する問題を扱うことができない。そこで線形化有限変位理論に対する仮想仕事の定理を用いて、⁴⁾ 荷重の方向を考慮した、剛性方程式を誘導する。荷重方向の変化に依存する分力の変位に関する1次の項まで考慮し、よく知られた内挿関数を用いて計算すると、既存の線形及び幾何剛性行列 K_E K_G に加え、次に示す付加的な剛性行列 K_{add} が得られる。

$$K = K_E + K_G + K_{add}$$

水圧

$$K_{add} = q \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -L/12 & 0 & 1/2 & L/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & L/12 & 0 & 1/2 & -L/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

中心方向荷重

$$K_{add} = \frac{q}{R} \begin{pmatrix} L/3 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & & \\ L/6 & 0 & 0 & L/3 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{Sym.}$$

5. 数値計算結果 (1) リング：数値計算

結果と既存解との比較を、Table.1 に示す。これによると固有値の1次モードだけを比較した場合、水圧については既存解とほぼ等しい値を示すが、横力と中心方向荷重については、既存解よりもかなり小さい値を示す。既存解においては、リングは外部拘束がなく、一様な圧縮力のみを受けるとして解いているため、座屈形としてはFig.2(a)のように対称なものが考えられる。しかし、有限要素解析においては、一点固定支持の条件で解くため、Fig.2(b)のように支持点を中心とした、剛体的変形が、比較的簡単に起こることに原因すると思われる。そこでTable.1 で2次モードを比較してみると、横力では値がほぼ一致した。

(2) 円弧アーチ：アーチとしてFig.3 のような両端ヒンジアーチを考えた。計算結果をTable.2 に示す。これによれば、中心の角度αが小さいうちは、荷重条件による座屈係数の差は小さく、数%程度である。しかし角度が大きくなるにつれ差は広がり、150°では、水圧の座屈係数は、横力の3倍、死荷重の5倍にもなる。既存解との比較をTable.3,4 に示す。横力については、Table.3 に示すように、値はほぼ一致した。荷重の方向を特定できなかった既存解については、Table.4 に示すように、水圧についての計算結果とほぼ一致した。このことから、この既存解は水圧下での座屈を表わしていたことを、確認することができた。

6. まとめ 分布荷重の方向の変化を考慮した面内梁一柱の剛性方程式を誘導した。この剛性方程式をリング及び円弧アーチの面内座屈に適用し、一定の範囲で得られていた既存解を検証した。円弧アーチの面内座屈に対する荷重の方向の影響は、アーチの中心角が小さいうちは、少ないが、中心角が大きくなるに従い顕著になることがわかった。このことは、従来の有限要素解析では、荷重の方向が変化する問題を扱っていなかったため、特に重要と思われる。

7. 参考文献

1) C.R.C. JAPAN; Handbook of Structural Stability, コロナ社
2) Timoshenko & Gere ; Theoly of Elastic Stability , 2nd.Ed. ; McGraw-Hill, 1963
3) Don O.Brush , Bo O Almroth ; Buckling of Bars, Plates, Shells ; McGraw-Hill, 1975
4) Hasegawa, A. et. al. ; A Concise and Explicit Formulation of Out-of-plane Instability of Thin-Walled Members , Proc. JSCE struct. Eng. /Earthq. Eng. Vol2 No.1 Apr.1985

Table.1 リングの座屈係数

横 力	既存解	1 次 モード	2 次 モード
		4. 0	
	F E M	0. 71	4. 03
水 圧	既存解	3. 0	
		3. 02	3. 02
中心方向荷重	既存解	4. 5	
		-1. 34	6. 52

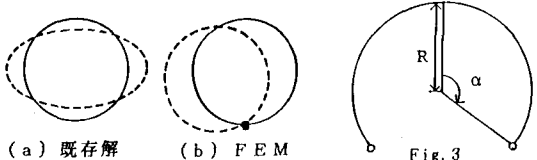


Fig.2 リングの座屈

Fig.3 両端ヒンジ円弧アーチ

Table.2 両端ヒンジアーチの座屈係数

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
活荷重	36.87	9.29	3.50	1.08	0.14	0.0
死荷重	35.90	8.27	2.59	0.63	0.09	0.0
横 力	36.04	8.73	3.28	0.99	0.13	0.0
水 圧	35.09	8.00	3.01	1.25	0.44	0.0
中心方向荷重	36.08	8.93	3.80	1.71	0.40	0.0

Table.3 両端ヒンジアーチの既存解との比較 1

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
既存解	36.00	8.72	3.27	1.00	0.13	0.0
横 力	36.04	8.73	3.28	0.99	0.13	0.0

Table.4 両端ヒンジアーチの既存解との比較 2

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
既存解	35.00	8.00	3.00	1.25	0.44	0.0
水 圧	35.09	8.00	3.01	1.25	0.44	0.0