

東京大学 学生員 波多野 匠 東京大学 正員 長谷川 彰夫
 名古屋工業大学 正員 後藤 芳顕 東京大学 Dellelegne Teshome

1. まえがき： 幾何学的初期不整を持つ面内梁-柱の耐荷力を陽な形で比較的簡単に、しかも精度よく評価するのに、最大圧縮応力が降伏に達するときを耐荷力と定義して求めるPerry-Robertson 形の公式¹⁾があるのはよく知られている。横座屈などを対象とする面外梁-柱に対しても、同様の考え方を適用すれば、面外耐荷力に関しても比較的容易に近似解が得られるはずである。ここでは、梁-柱の面外耐荷力に関するPerry-Robertson 形の陽な公式を誘導する。さらに、この方法の検証と、荷重条件や境界条件が複雑でこの方法が適用できない場合を考え、すでに求めた剛性方程式²⁾を用いて、有限要素法による検討を行なう。

2. 面外耐荷力に関する陽な解法： 簡単のため、Fig. 1に示すような面内曲げのみを受ける、面外方向に単純支持された、2軸対称I形断面梁を考える。梁はy方向の初期たわみ v_0 と初期ねじれ ϕ_0 を持つものとする。対応する付加たわみ、付加ねじれを v, ϕ とし、付加y方向曲げ及び、ねじれモーメントにはこの v, ϕ のみが、寄与することに注意すると、支配方程式は、

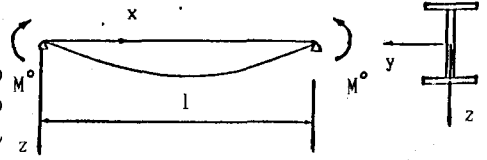


Fig.1 A Simply Supported Beam

$$E I_{yy} v'''' + M^0 \phi'' = -M^0 \phi_0'' , \quad E I_{\omega\omega} \phi'''' - G J \phi'' + M^0 v'' = -M^0 v_0'' \quad (1 \quad a, b)$$

となる。以下、特に断わらない限り、記号は文献3)に従う。初期たわみ、初期ねじれを最大値 k_1, k_2 の半波のsineで考え、

$$v_0 = k_1 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) , \quad \phi_0 = k_2 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \quad (2 \quad a, b)$$

とし、面外方向単純支持の境界条件 $v = v'' = 0, \quad \phi = \phi'' = 0$ ($x = 0, l$) を満足する最大値 a_1, a_2 の付加たわみ、付加ねじれを

$$v = a_1 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) , \quad \phi = a_2 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \quad (3 \quad a, b)$$

の形の解で仮定して、式(1)に代入し、 a_1, a_2 について解くと

$$a_1 = \frac{k_1 M^0 + k_2 \gamma_s^2 P_\phi M^0}{M_0^2 - M^0}, \quad a_2 = \frac{k_1 P_v M^0 + k_2 M^0}{M_0^2 - M^0} \quad (4 \quad a, b)$$

が得られる。ここに、 P_v, P_ϕ, M_0 はそれぞれ単独のy方向曲げ座屈荷重、ねじれ座屈荷重、横座屈モーメントで

$$P_v = E I_{yy} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \quad P_\phi = \left\{ E I_{\omega\omega} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + G J \right\} / \gamma_s^2, \quad M_0 = \sqrt{\gamma_s^2 P_v P_\phi} \quad (5 \quad a-c)$$

梁軸中央断面の最大圧縮応力の発生する位置を、 (y_0, z_0, ω_0) とすると最大圧縮応力 σ_{max} は、

$$\sigma_{max} = \frac{M^0}{I_{zz}} z_0 + \frac{M_v}{I_{yy}} y_0 + \frac{M_\omega}{I_{\omega\omega}} \omega_0 \quad \text{ここに、} M_v = -E I_{yy} v'', \quad M_\omega = -E I_{\omega\omega} \phi'' \quad (6 \quad a-c)$$

式(6a)の右辺第2, 3項が、付加たわみ、付加ねじれによる発生応力であり、式(6b,c)に式(3,4)を代入することにより、最大圧縮応力 σ_{max} が面内(z方向)外力モーメント M^0 の関数として求まる。

面内梁-柱のPerry-Robertson 公式の場合と同様に、この最大圧縮応力が降伏応力に到達するときを、幾何学的初期不整を持つ梁の横倒れ耐荷力と定義し、式(6a)の $\sigma_{max} = \sigma_Y$ として、結果を整理すると、簡単な変形で、次のような M^0/M_Y ($=x$ とする)に関する3次方程式が求まる。

$$x + \frac{x(\lambda_2 x + k_2 \lambda_1^2) r_1}{\lambda_1^2 - x^2} + \frac{x(k_2 x + \lambda_2) \lambda_3}{\lambda_1^2 - x^2} = 1 \quad (7)$$

ここに、 $\lambda_1 = M_0 / M_Y, \quad \lambda_2 = k_1 P_v / M_Y, \quad \lambda_3 = P_v \omega_0 / M_Y z_0$

$$r_1 = (I_{zz} / I_{yy}) (y_0 / z_0) \quad \text{ただし} \quad P_z = E I_{zz} (\pi / l)^2 \quad (8 \quad a-e)$$

ここに、 M_Y は面内z方向曲げの降伏モーメントである ($M_Y = \sigma_Y I_{zz} / z_0$)。

面外変位に関する幾何学的初期不整としての y 方向初期たわみ、初期ねじれ、式 (2) の最大値 k_1, k_2 が与えられたとき、式 (7) の 3 次方程式を解くことにより、梁の横倒れ耐荷力 M^0 を求めることができる。よく知られた面内梁-柱の Perry-Robertson 公式では、耐荷力が 2 次方程式の解となり、解そのものも陽に与えることができるが、同様の崩壊定義でも横倒れ耐荷力は 3 次方程式の解となり、解そのものを得るには、Newton 法などの数値計算にたよらざるをえない。しかし、厳密な非弾性有限変位問題としては、極めて難しい問題に属する横倒れ耐荷力が、近似解にせよ、式 (7) のような比較的簡単な 3 次方程式によって解き得ることの工学的意義は大きい。さらに式 (3, 4) を用いることにより、簡単に初期降伏に至るまでの面内曲げモーメント M^0 と面外たわみ v 、またはねじれ ϕ の関係を得ることができる。

以上、最も簡単な面外問題として面内曲げのみを受ける単純支持 2 軸対称 I 形断面梁を扱った。しかし、初期たわみ形状、境界条件が同じである限り、表現はやや複雑となるものの、軸力と面内曲げを受ける非対称断面梁の場合も支配方程式は 3 次方程式としてまとめられ、比較的簡単に解を得ることができる。

3. 数値計算例： 面外 y 方向初期たわみ

$k_1=1/1000$, 初期ねじれ $k_2=1/100, 5/100$ の 2 通りについて、2 軸対称 I 形断面のフランジ幅を変化させることによって剛性を変え、式 (7) の 3 次方程式を Newton 法で解いて得た横倒れ耐荷力の結果を、Fig. 2 に示す。柱の耐荷力曲線の場合と類似の傾向で横倒れ耐荷力についても、幾何学的面外初期不整により、その耐荷力が低下することが確認できる。式 (3, 4) を用いて得られた $k_2=5/100$ の場合の面内曲げモーメント M^0 と面外たわみ v の関係を Fig. 3 に示す。図の曲線の終結点が初期降伏を開始する点であり、横倒れ耐荷力は、その点での面内曲げモーメントで定義されている。

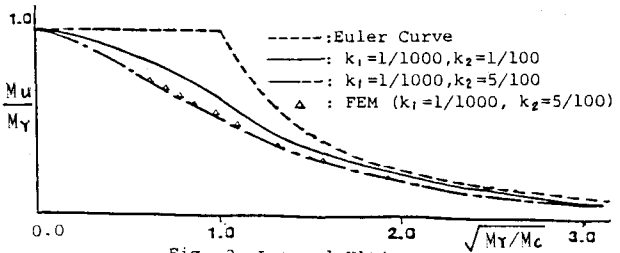


Fig. 2 Lateral Ultimate Strength Curves

4. 有限要素法による検討： 3. で誘導した Perry-Robertson 形の 3 次方程式の解を検証し、さらに、有限要素解析の開発をはかるために、すでに陽な形で求めた剛性方程式を用いて有限要素法の定式化を行ない、計算を試みた。荷重-変位曲線を求めるための仮定及び横倒れ耐荷力の定義は、3. の解析的手法と同一にし、線形化有限変位理論の剛性方程式を用いた線形計算のみによって、対応解を求めた。面外初期たわみ、初期ねじれなど、3. と同じ条件下での有限要素法による解を Fig. 2, 3 に示す。3. の解析的手法による解と数値計算誤差の範囲で一致し、ここで検討した両手法による結果の妥当性を確認できた。解析的な手法による 3 次方程式は、計算量の点ではるかに楽であり、それが大きな利点であるが、複雑な荷重条件や境界条件あるいは変断面部材には適用することができない。一方、ここで解の妥当性を確認した有限要素法は、計算量が増しても基本的には線形計算であり、多様な問題設定に対し威力を発揮し得る。

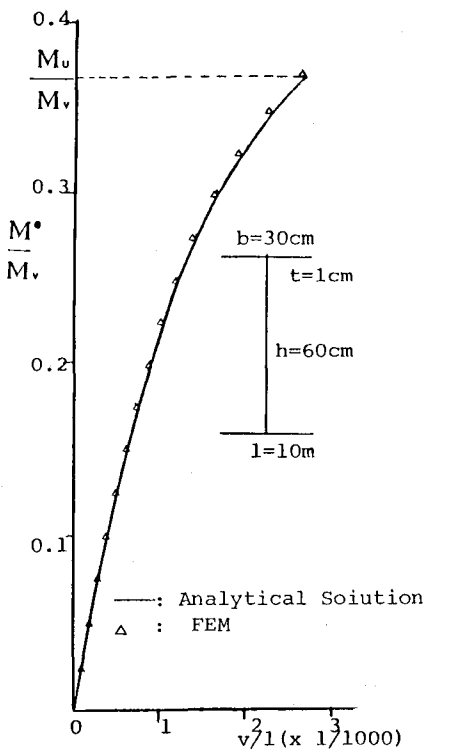


Fig. 3 Load-Displacement Curve

5. まとめ： 最大圧縮応力の初期降伏を耐荷力と定義した上で、幾何学的な面外初期不整を持つ梁-柱の面外耐荷力を、面内耐荷力問題での Perry-Robertson 公式に対応する簡単な形をした 3 次方程式の解として求めた。同様の問題を有限要素法によっても実行し得ることを示し、両者の解の一致を確認した上で両手法の役割を検討した。

参考文献： 1) Johnston, B.G. ed.: Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 3rd ed. John Wiley and Sons, 1976
 2) Hasegawa, A. et. al.; A Concise and Explicit Formulation of Out-of-Plane Instability of Thin-Walled Members, Proc. JSCE Struct. Eng./Earthq. Eng., Vol. 2 No. 1 Apr. 1985
 3) 西野文雄, 長谷川彰夫: 構造物の弾性解析, 技報堂, 1983