

東京都立大学 学生員○田中 充夫

東京都立大学 正会員 野上 邦栄

東京都立大学 正会員 伊藤 文人

1. はじめに 数年前川井¹⁾は、極限解析の立場から従来の離散化手法に代わる新しい離散化モデルを考案し、多くの分野に適用し数々の良い結果を報告している。野上・伊藤は、このモデルを参考にした独自のモデル(有限剛体要素モデル)により、数年前から研究を進めている²⁾。そして棒部材に対して、このモデルが弾性範囲でも精度良く解析できることを明らかにした。また、本来の適用領域である耐荷力解析に対しても本モデルの有効性を報告している。ところで、これらの一連の解析はねじれ変形を含まない問題が中心であった。しかし、一般的な薄肉断面部材の変形挙動の解析には、このねじれ変形を考慮する必要がある。そこで本報告では、その基本となる有限変位問題に対してねじれ変形を考慮した新しい離散化モデルを開発し、このモデルの妥当性を検討している。

2. 有限剛体要素モデルと釣合方程式

本モデルは、FEMで用いられる「要素」を剛体と適当なバネの組み合わせによって置き換えたものである。このため、バネの種類は梁の変形挙動に対応できるように選択する必要がある。本モデルの場合は Fig.1のように軸バネを n 本、サンプナンのねじれバネおよび剪断バネを各1本配置した。

バネ定数及びバネ位置は、本来の連続な弾性体としての内力の仮想仕事 $\delta \pi_e$ と、剛体バネ系のバネによる仮想仕事 $\delta \pi_t$ が同一変形状態に対して

$$\delta \pi_e = \delta \pi_t \quad \dots (1)$$

になるように定めた。特に、2軸対称断面の場合、各バネ定数は次式のように与えられる。

$$K_{ik}^a = (EA)_i / 4S_i \quad (k=1-4), \quad K_{gi} = (GJ)_i / S_i, \quad K_{xi}^s = K_{yi}^s = (GA)_i / S_i \quad \dots (2)$$

ここに、 E , G , J は各々弾性係数、剪断弾性係数およびサンプナンのねじれ定数である。また、 A_i , S_i は、バネ要素(i)の断面積および要素長さである。また、ねじれバネ、せん断バネの取付位置は、剪断中心に、軸バネは次式のように配置すれば良い。

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ik}^z &= (I_{\eta\eta})_i / A_i \\ \eta_{ik}^z &= (I_{\xi\xi})_i / A_i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 $I_{\eta\eta}$, $I_{\xi\xi}$ は、それぞれ ξ 軸および η 軸に関する断面2次モーメントである。

また、各軸バネの受け持つ単位より関数 ω_{ik} は、

$$\omega_{ik}^2 = (I_{\omega\omega})_i / A_i \quad (4)$$

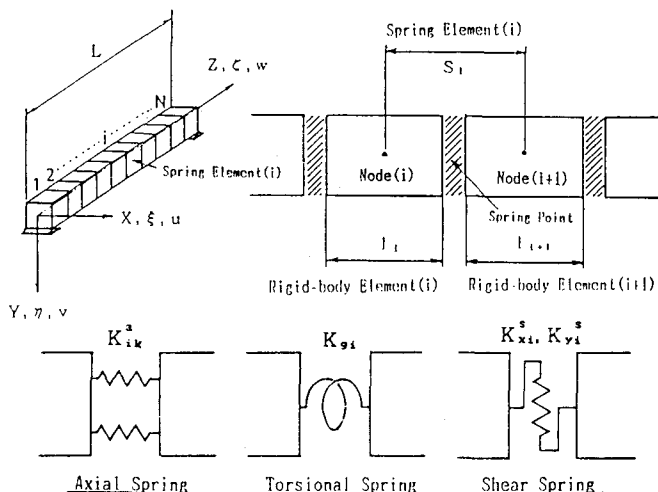


Fig.1 有限剛体要素モデル

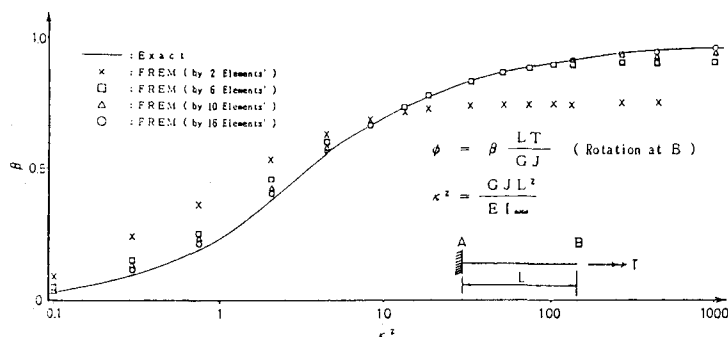


Fig.2 片持梁のねじれ変形曲線

と与えられる。ここに、 I_{eq} はそり2次モーメントである。

バネ要素 (i) の初期不整を含む非線形釣合方程式は、仮想仕事の原理により次式のように与えられる。

$$\Phi_i = \Phi(\delta_i, R_i) \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\delta_i = [\phi_{i-1}, w_i, u_i, v_i, u'_i, v'_i, \phi_i, w_{i+1}, u_{i+1}, v_{i+1}, u'_{i+1}, v'_{i+1}, \phi_{i+1}, \phi_{i+2}]$$

$$R_i = [T_{i-1}, P_i, V_{xi}, V_{yi}, M_{yi}, M_{xi}, T_i, P_{i+1}, V_{xi+1}, V_{yi+1}, M_{yi+1}, M_{xi+1}, T_{i+1}, T_{i+2}]$$

ここに、 δ_i 、 R_i は各々バネ要素 (i) の節点変位および節点力を意味する。また、収束計算にはNewton-Raphson法を用いた。

3. 解析結果 まず、ねじれ変形を新たに考慮した本モデルの精度について、自由端にトルクを受ける片持ち梁の計算例を用いて検討した。その結果がFig. 2である。これにより、ほぼ6~10要素で、ねじれ変形の精度は保証されると考えられる。

つぎに、両端に等曲げを受ける単純梁の場合について有限変位解析を行った結果が、Fig. 3である。各初期不整に対してはば妥当な変形挙動を追跡できた。また、種々のねじれ剛性 κ^2 に対する横ねじれ座屈解析を行った結果がFig. 4である。なお、座屈荷重はスパン中央において $u^0/L = 0.5 \times 10^{-6}$ の半波の初期不整量を持つ単純梁の非線形解析からその近似値を求めた。解析結果は、10要素ではば妥当な解を与えた。また、計算結果が理論解の実線に収束していることにより、B式の断面2次モーメントを持つ横ねじれ座屈モーメント式が理論解として妥当であると考えられる。

4. 結論 ねじれ変形を考慮した有限剛体要素モデルの開発を行い、その精度について簡単な数値計算例により検討した訳であるが、その結果本モデルは、梁の弾性解析に十分適応できることが明らかとなった。特に、2軸対称断面部材の場合、軸バネは中立軸に関して対称に断面2次半径の位置に4本、サンブナンのねじれバネとx, y方向の剪断バネは剪断中心に1本それぞれ配置すれば良く、ほぼ10要素で精度良く解析できた。また、本モデルは座屈後挙動の解析に対しても充分有効であることが確認された。

参考文献

- 1) T.Kawai: New discrete structural models and generalization of the method of limit analysis, International Conference of Finite Elements in Nonlinear Solid and Structural Mechanics, 1977
- 2) 野上・伊藤: 剛体要素-バネ系モデルによる柱の座屈解析, 第34回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1979、等

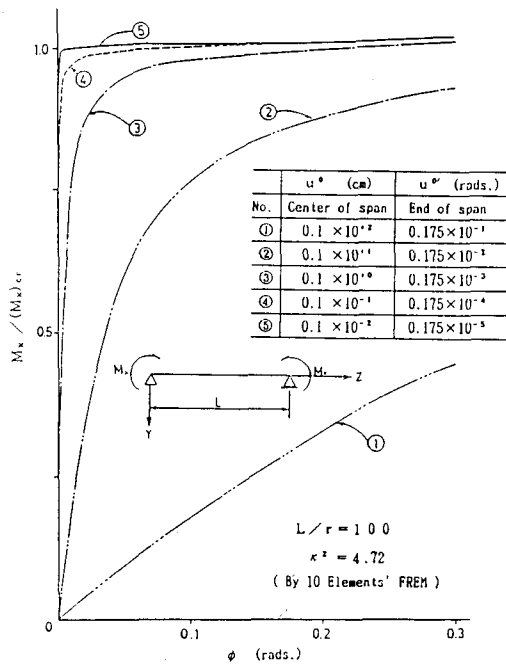


Fig. 3 単純梁の荷重-変位曲線

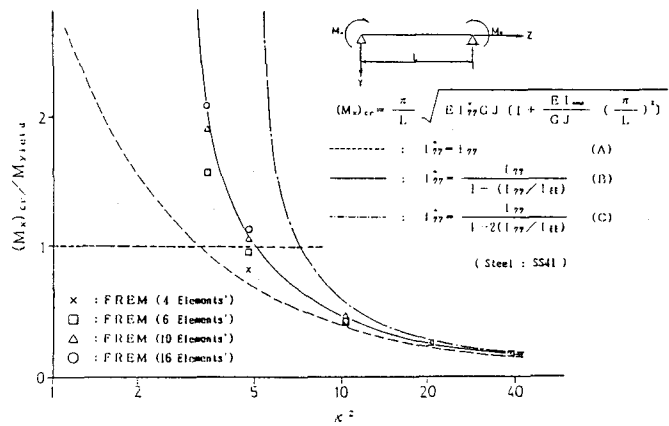


Fig. 4 単純梁の横ねじれ座屈曲線