

横河工事(株) 正会員 松原 薫
 長岡技術科学大学 正会員 笹戸 松二
 長岡技術科学大学 正会員 林 正

1. まえがき

マトリックス構造解析法において、ねじれ率を一般化変位に選んだ薄肉断面部材の解析では、節点においてねじれ率の座標変換が必要になる。ねじれ率の変換を扱った解法としては、1) 隣接部材のねじれ率を等しいとする方法¹⁾、2) 部材の連結部に仮想の円弧部材を挿入する方法²⁾ が発表されている。これらの解法は、ねじれ率を本質的に座標変換する解法ではない。

ねじれ率は曲率とともに一つのテンソルを形成するので³⁾、本報告ではねじれ率と曲率を一般化変位に用いて座標変換する解析法について、数値計算結果からその有用性を検討する。

2. ねじれ率と曲率

空間曲線材上の任意の点で接線方向の基底ベクトルを e_1 とする正規直交系 (e_1, e_2, e_3) を定める。曲線材の初期ねじれ率を κ_1 、法平面内の e_2, e_3 方向の曲率を κ_2, κ_3 として、次のベクトル κ を定義する。

$$\kappa = \kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2 + \kappa_3 e_3 \quad (1)$$

軸線に沿う座標 s に関する e_i の微分 e'_i は、フルネ・セリの公式により次式で与えられる。

$$e'_i = \kappa \times e_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

また、変形後の諸量を上付き記号 $*$ で表わせば、変形後の基底ベクトル e_i^* は式(2)と同じ形の式(3)で与えられ、これより変形後のねじれ率と曲率 κ_i^* は式(4)で求められる⁴⁾。

$$(e_i^*)' = \kappa^* \times e_i^* \quad (3) \quad \kappa_i^* = (e_j^*)' \cdot e_k^* \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (4)$$

次に、薄肉直線部材を考えて、 x 軸を部材軸に、 y, z 軸を断面主軸に一致させて部材軸上の x, y, z 方向の変位成分を u_0, v_0, w_0 、 x 軸まわりのねじれ角を ϕ とする。変形後のねじれ率を κ_x^* 、曲率を κ_y^*, κ_z^* と書き改めて3次以上の非線形項を省略すれば次式で与えられる⁴⁾。

$$\kappa_x^* = \phi' + \frac{1}{2}(v_0'' w_0' - v_0' w_0''), \quad \kappa_y^* = w_0'' - u_0'' w_0' - \phi v_0'', \quad \kappa_z^* = v_0'' - u_0'' v_0' + \phi w_0'' \quad (5)$$

3. 立体解析

本研究では、一般化変位として通常の立体解析に用いられる並進変位 u, v, w と回転成分 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ の他に $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ を加えた9自由度を用いる。部材の両端 a, b におけるこれらの変位をベクトル d_a, d_b で

$$d_\alpha = \{u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha, \theta_{x\alpha}, \theta_{y\alpha}, \theta_{z\alpha}, \kappa_{x\alpha}, \kappa_{y\alpha}, \kappa_{z\alpha}\}^T \quad (\alpha = a, b) \quad (6)$$

のように表わす。本報告では、回転と曲率に関する成分を、

$$\theta_{x\alpha} = \phi_\alpha, \quad \theta_{y\alpha} = -w_\alpha', \quad \theta_{z\alpha} = v_\alpha', \quad \kappa_{x\alpha} = \phi_\alpha', \quad \kappa_{y\alpha} = w_\alpha'', \quad \kappa_{z\alpha} = v_\alpha'' \quad (7)$$

とおいた。また、部材の変形を規定する4つのパラメータ u_0, v_0, w_0, ϕ を式(6)、(7)の部材両端の変位で表わすために、形状関数は u_0 には1次式、 v_0 と w_0 には5次式、 ϕ には3次の多項式を用いた。

式(6)の d_a, d_b を全体座標系に変換したものを D_a, D_b で表わせば、次の変換式(8)が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} D_a &= T d_a \\ D_b &= T d_b \end{aligned} \right\} \quad (8) \quad T = \begin{bmatrix} R \\ R \\ R \end{bmatrix} \quad (9) \quad T = \begin{bmatrix} R \\ R \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここに、 T は部材の座標変換行列、 R は3次の回転行列である。

式(6)～(9)を用いれば、通常の手法でマトリックス法を定式化することができる。なお、以下の数値計算例では従来からの6自由度による解法と、式(6)の右辺最後の曲率の2成分を省略した7自由度による解法を用いた。7自由度の解法では、式(10)の座標変換行列を用いた¹⁾。

4. 数値計算例

水平面内にある円弧はりとは折線はりに鉛直方向に集中荷重 $P_1 = 1t$ が作用する場合の弾性線形解析を行った(図-1, 2)。

数値計算では、はりの分割数 M を 8, 16, 32 とした。図中の数字は 16 分割の場合の節点番号である。折線はりでは、 $\beta = 30^\circ \sim 180^\circ$ の場合について計算した。はりの材料定数は、 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.3$ とし、図-3 に示す断面を用いた。

5. 計算結果

(1) 円弧はり：図-4, 5 にたわみ w とバイモーメント M_ω の分布を示す。円弧はりでは元来ねじれ率は連続するので、無限分割した場合には自由度と 9 自由度の解法による差はなくなる。したがって、たわみとバイモーメントの解法による差は、8 分割ではそれぞれ 10.1, 18.7% であったものが 32 分割では 1.8, 1.3% になった。また、表-1 に示す 6 自由度の計算から、本計算例では曲げねじれ剛性を無視することができないことがわかる。

(2) 折線はり： $\beta = 90^\circ$ で

非対称荷重 P_2 が作用したときの

ねじれ角 ϕ とバイモーメント M_ω の分布を図-6, 7 に示す。図-7 から明らかなように、9 自由度による解法ではバイモーメントははりの交差部で連続になるが、7 自由度では連続する。

表-2 に、 β を変化させた場合の自由度による差を比で表わして示す。折れ角が鋭角 ($\beta = 30^\circ$) の場合に自由度数による差が最も著しく現われ、直線はりに近づくとその差は小さくなることがわかる。ただし、自由度による差はたわみでは小さくて、 w の形状関数の相異も影響していると考えられる。

6. あとがき 以上の計算結果より、部材の交差角が鋭角の場合にはねじれ率を座標変換する必要があると言える。さらに、移動座標を用いる有限変位解析の場合についても検討する必要があると思われる。

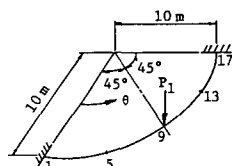


図-1 円弧はり

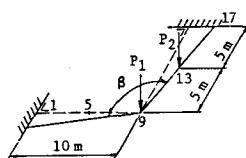


図-2 折線はり

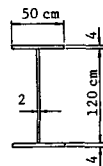


図-3 断面寸法

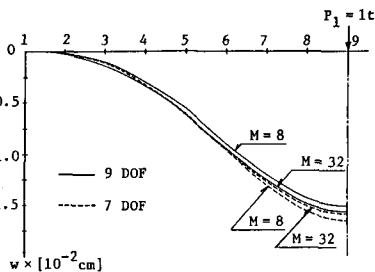


図-4 円弧はりのたわみ

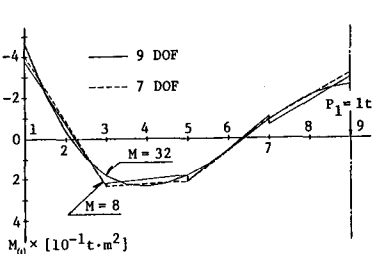


図-5 円弧はりのバイモーメント

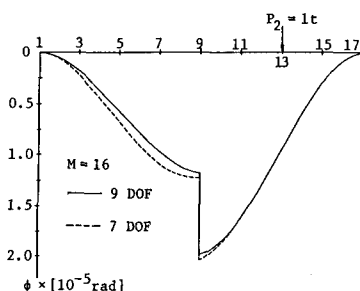


図-6 折線はりのねじれ角

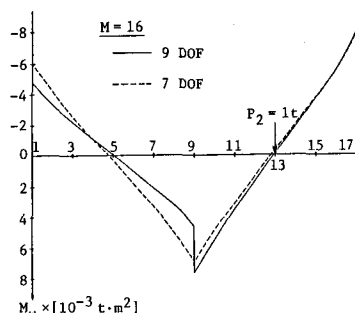


図-7 折線はりのバイモーメント

表-1 曲線はりの自由度による比較

Div. No.	W				M _ω			
	6-DOF/9-DOF		7-DOF/9-DOF		7-DOF/9-DOF			
(M)	θ=22.5°	θ=45°	θ=22.5°	θ=45°	θ=0°	22.5(-)	22.5(+)	θ=45°
8	14.38	16.52	1.101	1.096	1.068	1.187	1.016	1.074
16	15.99	16.39	1.040	1.034	1.022	1.035	1.014	1.023
32	16.26	16.33	1.018	1.015	1.013	1.004	1.002	1.004

表-2 折線はりの自由度による比較

β	W (Node No. 9)				M _ω (7-DOF/9-DOF)			
	P ₁ = 1		P ₂ = 1		P ₁ = 1		P ₂ = 1	
	6/9-DOF	7/9-DOF	6/9-DOF	7/9-DOF	No. 9	No. 17	No. 9	No. 17
30°	1.025	1.025	1.040	1.040	2.051	1.288	0.260	0.730
60°	1.025	1.025	1.041	1.040	1.286	1.117	0.677	0.889
90°	1.026	1.025	1.042	1.040	1.110	1.054	0.901	0.977
120°	1.029	1.025	1.044	1.040	1.044	1.027	0.993	1.015
150°	1.042	1.025	1.054	1.040	1.019	1.017	1.027	1.030
180°	1.025	1.025	1.038	1.038	—	—	—	—

1) 結城・前田：薄肉断面構造の三次元挙動の解析，土木学会論文報告集，No. 224, 1974.

2) Bazant, Z.P. & M.E. Nimeiri: Large-Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames, ASCE, Vol. 99, EM 6, 1973.

3) 川井忠彦：座屈問題解析，コンピューターによる構造工学講座Ⅱ-6-B，培風館，1974.

4) 前田・林：薄肉断面部材の有限変位場，本講演概要集。