

長岡技術科学大学 正会員 林 正
近畿大学理工学部 正会員 前田 幸雄

1. まえがき

薄肉断面部材の有限変位場は、数多くの研究によって実用的には十分な精度で求められているが^{1)~3)}、さらに精密な変位場を求めることも可能である。本報告では、まず有限回転を考慮した空間曲線材の厳密なねじれ率と曲率を求め、次にこの曲線材を解析の基準軸として充実曲線棒部材と薄肉直線棒部材の有限変位場を求める。

2. 空間曲線材

(1) 初期曲率とねじれ率：空間曲線上の点 O に固定された右手系直交曲線座標 (x, y, z) の座標 x を曲線に沿ってとり、 y, z 軸を法平面内にとり、法線 n と x 軸のなす角を ψ とする(図-1)。接線 t と y, z 軸方向の基底ベクトルを e_1, e_2, e_3 、曲線の曲率を κ_0 、ねじれ率を τ_0 とすると、フルチ・セレの公式を用いて次式が得られる。

$$e_i' = \kappa_0 x e_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (1) \quad \kappa = \kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2 + \kappa_3 e_3 \quad (2)$$

$$\kappa_1 = \tau_0 + \psi', \quad \kappa_2 = \kappa_0 \sin \psi, \quad \kappa_3 = \kappa_0 \cos \psi \quad (3)$$

ここに、 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ は軸線の初期ねじれ率と初期曲率の2成分、プライムは x に関する微分を表す。

(2) 座標系の移動と回転：変位後の力学量を $(\cdot)^*$ で表す。図-2の変位後の単位接線ベクトル e_1^* の方向余弦 l^*, m^*, n^* は e_2 方向の並進変位 u_0, v_0, w_0 の関数となる。

$$l^* = (1 + t_1^*)/\sqrt{g_0^*}, \quad m^* = t_2^*/\sqrt{g_0^*}, \quad n^* = t_3^*/\sqrt{g_0^*} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} t_1^* &= u_0' - \kappa_3 v_0 + \kappa_2 w_0, & t_2^* &= v_0' - \kappa_1 w_0 + \kappa_3 u_0, \\ t_3^* &= w_0' - \kappa_2 u_0 + \kappa_1 v_0, & g_0^* &= (1 + t_1^*)^2 + (t_2^*)^2 + (t_3^*)^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

次に、図-2において点 O^* が点 O に重なるように変位後の曲線を平行移動すると

変位前後の単位系は一つの単位球面上に乗る(図-3)。そこで、 e_1 と e_1^* に直交する軸を回転軸として単位系 (e_1^*, e_2^*, e_3^*) を e_1 と e_1^* のなす角 α だけ左ねじの向きに回転して e_1^* を e_1 に一致させる。さらに $\hat{e}_2$ をねじれ角 ϕ だけ左ねじの向きに回転すれば e_2^* は e_2 に一致する。したがって、この2つの回転の順序を変えて逆回転すると e_i^* は

$$e_i^* = R_\alpha R_\phi e_i \equiv R_0 e_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (6)$$

となる。回転行列 R_0 の要素 r_{ij} は文献4)の式を用いて求めることができる。

図-2 座標系の移動

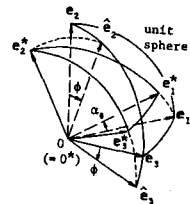


図-3 座標系の回転

(3) 変形後の伸び率・曲率・ねじれ率：式(6)を式(7.a, b)のように書換える。

$$e_i^* = r_{1i} e_1 + r_{2i} e_2 + r_{3i} e_3, \quad e_i = r_{2i} e_1^* + r_{12} e_2^* + r_{23} e_3^* \quad (i=1, 2, 3) \quad (7.a, b)$$

式(7.a)の両辺を x で微分し、これに式(1)、(7.b)を代入して整理すると次式が得られる。

$$(e_i^*)' = \kappa^* x e_i^* \quad (i=1, 2, 3) \quad (8) \quad \kappa^* = \kappa_1^* e_1^* + \kappa_2^* e_2^* + \kappa_3^* e_3^* \quad (9)$$

したがって、変形後のねじれ率 κ_1^* と曲率 κ_2^*, κ_3^* は式(10)で、伸び率 ϵ_0 は式(11)で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1^* &= \phi' + \hat{\kappa}_1 + \beta_3^* (m^*)' - \beta_2^* (n^*)' \\ \kappa_2^* &= (\kappa_2 + \hat{\kappa}_2) \cos \phi + (\kappa_3 + \hat{\kappa}_3) \sin \phi \\ \kappa_3^* &= -(\kappa_2 + \hat{\kappa}_2) \sin \phi + (\kappa_3 + \hat{\kappa}_3) \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\epsilon_0 = \sqrt{g_0^*} - 1 \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\kappa}_1 &= \kappa_1 l^* + \kappa_2 m^* + \kappa_3 n^* \\ \hat{\kappa}_2 &= -\beta_2^* (\kappa_1 + \hat{\kappa}_1) - (n^*)' + \beta_3^* (l^*)' \\ \hat{\kappa}_3 &= -\beta_3^* (\kappa_1 + \hat{\kappa}_1) + (m^*)' - \beta_2^* (l^*)' \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\beta_2^* = m^*/(1+l^*), \quad \beta_3^* = n^*/(1+l^*)$$

3. 充実曲線棒部材

より変位も無視した場合の充実曲線棒部材の有限変位場を求めるために、空間固定点 O に対する横断面内の x 軸との交点 O と任意点 P の位置ベクトル $\hat{r}_P$ 、点 O に対する点 P の位置ベクトル $\hat{r}_P$ を図-4のように定める。

点Pの変位 u_p は断面不変の仮定により式(6)の R_0 と単位行列 $\mathbb{I}$ を用いて式(13)で、式(14)で定義されるグリーンのひずみテンソル e_{ij} は式(15)で与えられる。

$$u_p = u_0 + (R_0 - \mathbb{I}) \hat{r}_p \quad (13) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (W_{p,i}^* \cdot W_{p,j}^* - W_{p,i}^* \cdot W_{p,i}^* - W_{p,j}^* \cdot W_{p,j}^* + W_{p,i}^* \cdot W_{p,i}^* + W_{p,j}^* \cdot W_{p,j}^*) \quad (14)$$

$$e_{xx} = \frac{1}{2} \left\{ (1 + \varepsilon_0 - \gamma \kappa_3^* + \gamma \kappa_2^*)^2 - (1 - \gamma \kappa_3 + \gamma \kappa_2)^2 \right\} + \frac{1}{2} (\gamma^2 + \gamma^2) \{ (\kappa_1^*)^2 - \kappa_1^2 \} \quad (15)$$

$$2e_{xy} = -\gamma(\kappa_1^* - \kappa_1), \quad 2e_{zx} = \gamma(\kappa_1^* - \kappa_1), \quad e_{yy} = e_{zz} = e_{yz} = 0$$

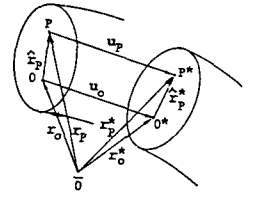


図-4 位置ベクトル

u_p, e_{ij} を式(4)の方向余弦で表わせば、変位 u_0 で根拠展開することが出来る。

4. 薄肉直線棒部材

(1) 仮定：薄肉直線棒部材は等断面材とし、次の仮定を用いる。

- ① 板厚中心線で囲まれる断面の形状は不変である。
- ② 薄板の変形に関して、Kirchhoff-Love の仮定が成り立つ。
- ③ セン断ひずみによる変形は、サン・ブナンのねじりによる変形のみを考える。

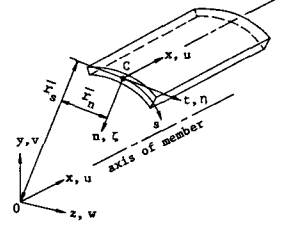


図-5 座標系と変位

(2) 座標系：部材軸上の点Oを原点とする直交直線座標 (x, y, z) と板厚中心線上の点Cを原点とする直交曲線座標 (x, s, n) を用いる。 x 軸は部材軸と平行で、 s 軸は板厚中心線に沿ってとり、 n 軸は薄板中央面の法線方向にとる。また、 s 軸の接線をもととして、 x, t, n 軸方向の変位を u, γ, ζ とする(図-5)。なお、中央面上の諸量にはバーを付けて表わす。

(3) 中央面上の変位：仮定①から求められる変位には、横断面のそりによって生ずる変位は含まれない。 γ で、仮定①による変位に薄板中央面上のそり変位 $\tilde{\alpha}$ を加えたものを中央面上の変位とする。この仮定から、点Cの変位 $\bar{u}_c$ は点Oの変位 u_0 と中央面上のそり変位 $\tilde{\alpha}_c$ 及び位置ベクトル $\bar{r}_c$ を用いて次式で表わされる。

$$\bar{u}_c = u_0 + \tilde{\alpha}_c + (R_0 - \mathbb{I})(\bar{r}_c + \tilde{\alpha}_c), \quad \bar{u}_c = (\bar{u}_c, \bar{v}_c, \bar{w}_c)^T, \quad \tilde{\alpha}_c = (\tilde{\alpha}, 0, 0)^T, \quad \bar{r}_c = (0, \bar{y}, \bar{z})^T \quad (16)$$

$\bar{u}_c$ を (x, s, n) 座標に変換して変位 u_0 に関する3乗以上の項を省略する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_c &= u_0 - \gamma (v_0' - u_0' v_0' + \phi w_0') - \gamma (\bar{w}_0' - u_0' \bar{w}_0' - \phi v_0') + \tilde{\alpha} \\ \bar{v}_c &= v_0 + \bar{r}_s \phi - \frac{1}{2} \bar{r}_n \phi^2 - \frac{1}{2} (\bar{r}_n \gamma_0' - \bar{r}_s \gamma_0') \gamma_0' + \tilde{\alpha} \gamma_0' \\ \bar{z}_c &= z_0 + \bar{r}_n \phi + \frac{1}{2} \bar{r}_s \phi^2 - \frac{1}{2} (\bar{r}_n \gamma_0' - \bar{r}_s \gamma_0') \gamma_0' + \tilde{\alpha} \gamma_0' \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\therefore \text{ここに, } \gamma_0 = v_0 \cos \beta + w_0 \sin \beta, \quad z_0 = -v_0 \sin \beta + w_0 \cos \beta \quad (18)$$

(4) 任意点の変位：式(17)の $\tilde{\alpha}$ は仮定③と式(20)の連続条件から求められる。

$$\bar{E} x_s = 0 \quad [\text{開断面}] \quad (19) \quad \oint (\partial \tilde{\alpha} / \partial s) ds = 0 \quad [\text{閉断面}] \quad (20)$$

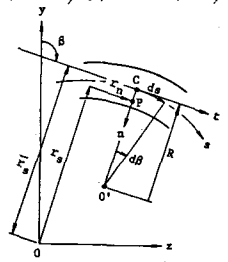


図-6 座標変換

薄肉断面内の任意の点Pの変位 u_p は、薄肉筒体シェルの式(21)に式(17)を代入したものを (x, y, z) 座標に逆変換すると式(22)のようになる。 u_p の各成分は式(24)で与えられ、開断面部材では $K_0 = 0$ とする。

$$u_p = \bar{u}_c + n (m^* - m) \quad (21) \quad u_p = u_0 + (R_0 - \mathbb{I}) \hat{r}_p + \tilde{u}_p \quad (22)$$

$$\text{ここに, } u_p = (u_p, v_p, w_p)^T, \quad \tilde{u}_p = -\gamma_1^* (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T, \quad \hat{r}_p = (0, y, z)^T \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} u_p &= u_0 - \gamma (v_0' - u_0' v_0' + \phi w_0') - \gamma (\bar{w}_0' - u_0' \bar{w}_0' - \phi v_0') - \omega_1 \gamma_1^* \\ v_p &= v_0 - \frac{1}{2} \gamma \{ \phi^2 + (v_0')^2 \} - \gamma (\phi + \frac{1}{2} v_0' w_0') - \omega_2 \gamma_1^*, \quad w_p = w_0 + \gamma (\phi - \frac{1}{2} v_0' w_0') - \frac{1}{2} \gamma \{ \phi^2 + (w_0')^2 \} - \omega_3 \gamma_1^* \\ \omega_1 &= (\bar{w}_0 + n \bar{r}_n) - \bar{w}_0 u_0' + \bar{w}_0 y v_0'' + \bar{w}_0 z w_0'' - n \{ \bar{r}_n (u_0 - \gamma v_0' - \gamma \bar{w}_0' - \bar{w}_0 \phi)' - \bar{w}_0 (v_0' \sin \beta - w_0' \cos \beta) \} \\ \omega_2 &= (\bar{w}_0 + n \bar{r}_n) v_0' + n \bar{r}_n \gamma_1^* (\bar{r}_s \cos \beta - K_0 \cos \beta - \frac{1}{2} \bar{r}_n \sin \beta), \quad K_0 = \frac{H_0}{t L_0}, \quad K_y = \frac{H_y}{H_0} - \frac{L_y}{L_0}, \quad K_z = \frac{H_z}{H_0} - \frac{L_z}{L_0} \\ \omega_3 &= (\bar{w}_0 + n \bar{r}_n) w_0' + n \bar{r}_n \gamma_1^* (\bar{r}_s \sin \beta - K_0 \sin \beta + \frac{1}{2} \bar{r}_n \cos \beta), \\ \bar{w}_0 &= \int_0^s (\bar{r}_s - K_0) ds, \quad \bar{w}_0 y = \int_0^s \{ \bar{y} \bar{r}_s - K_0 (K_y + \bar{y}) \} ds, \quad \bar{w}_0 z = \int_0^s \{ \bar{z} \bar{r}_s - K_0 (K_z + \bar{z}) \} ds \\ L_0 &= \oint (1/t) ds, \quad L_y = \oint (\bar{y}/t) ds, \quad L_z = \oint (\bar{z}/t) ds, \quad H_0 = \oint \bar{r}_s ds, \quad H_y = \oint \bar{y} \bar{r}_s ds, \quad H_z = \oint \bar{z} \bar{r}_s ds \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここに、 t は板厚を表わす。 ω_1 の非線形項を省略し、 $\omega_2 = \omega_3 = 0$ とおけば従来の式と一致する。

- 1) 西野・食方・長谷川・奥村：土木学会論文報告集, No. 225, 1974.
- 2) 平嶋・井浦・依田：土木学会論文報告集, No. 292, 1979.
- 3) 阿井・西野：土木学会論文報告集, No. 318, 1982.
- 4) 前田・林：土木学会論文報告集, No. 253, 1976.