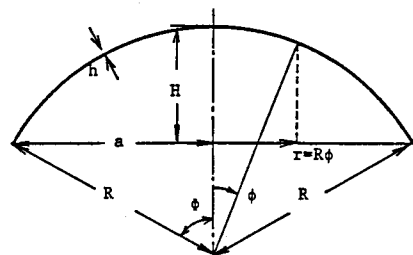


1・まえがき 球殻理論は、浅い理論と深い理論に分類でき、前者は面外せん断力の面内方向成分を面内方向釣合式で省略できるという仮定に基づくもので、その取扱いの容易さのために広く解析に利用されている。ところで、既往研究^{1)~4)}による浅い球殻理論の適用限界は $0.25 \leq H/a \leq 0.4$ ($30^\circ \leq \phi \leq 50^\circ$, H =ライズ、 a =半スパン長、 ϕ =半開角、図一/参照)とかなり広い範囲にわたっており、またその値は十分な数値的裏付けが示されていないようである。本報告は、浅い球殻の自由振動問題(ここでは軸対称振動に限定する)を取上げ、深い理論に基づく結果との数値的比較により、浅い球殻理論の適用限界の再検討を行うとともに、球殻の理論式を選択する際の基礎的データを提示するものである。

2・基礎式と解析方法 解析には、直交多項式の / つである区間 $[0, \pi]$ で定義される Shifted Legendre 多項式の零点を選点とする選点法⁵⁾を用い、図一/に示すような頂点で閉じた球殻を解析対象とした。せん断変形と回転慣性を考慮した軸対称振動問題の基礎方程式は以下のように与えられる⁶⁾。



R = Radius of curvature
a = Base radius
h = Shell thickness
H = Rise
 ϕ = Half opening angle
r = Radial base coordinate
 ϕ = Meridional coordinate

図一/ 解析モデル

$$\partial N_\phi / \partial \phi + (N_\phi - N_\theta) \cot \phi + Q_\phi = R \rho h \{ (1 + \delta) \partial^2 U / \partial t^2 + (2\delta/R) \partial^2 \beta / \partial t^2 \} \quad (1-1)$$

$$\partial Q_\phi / \partial \phi + Q_\phi \cot \phi - (N_\phi + N_\theta) = R \rho h (1 + \delta) \partial^2 W / \partial t^2 \quad (1-2)$$

$$\partial M_\phi / \partial \phi + (M_\phi - M_\theta) \cot \phi - R Q_\phi = R \rho h \{ (1 + 9\delta/5) \partial^2 \beta / \partial t^2 + (2\delta/R) \partial^2 U / \partial t^2 \} \quad (1-3)$$

ここで、 U =経線方向変位、 W =法線方向変位、 β =回転角、 ϕ =経角、 ρ =密度、 R =曲率半径、 h =厚さ、 $\delta = h^2/12R^2$ であり、合応力 (N_ϕ, N_θ, Q_ϕ) および曲げモーメント (M_ϕ, M_θ) は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} N_\phi &= (K/R) \{ \partial U / \partial \phi + W + v(U \cot \phi + W) \}, \quad N_\theta = (K/R) \{ v(\partial U / \partial \phi + W) + U \cot \phi + W \} \\ Q_\phi &= (\kappa G h / R) (\partial W / \partial \phi - U + R \beta), \quad M_\phi = (D/R) (\partial \beta / \partial \phi + v \beta \cot \phi) \\ M_\theta &= (D/R) (v \partial \beta / \partial \phi + \beta \cot \phi) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $K = Eh / (1 - v^2)$, $D = Eh^3 / 12(1 - v^2)$, E =弾性係数、 v =ポアソン比、 κ =せん断補正係数。

浅い球殻の基礎式は、従来用いられている仮定に基づき、式(1)と式(2)より導き、次に示す2つの場合を検討する。

Case (1) 半径方向座標 $r (=R\phi)$ を新たな独立変数とし、 $\cot \phi \equiv / / \phi$ として扱う。さらに、式(1-1)のせん断力項を零とし、また式(1-2)の回転慣性項と式(1-3)の経線方向慣性力を見捨てる。なお、このCase (1)は従来よく用いられている浅い球殻理論の基礎式である。

Case (2) $r (=R\phi)$, $\cot \phi \equiv / / \phi$ とする他は、Case (1)のような近似を行なわない。

数値計算で考慮した境界条件は、固定支持 ($W=U=\beta=0$) である。

3・数値計算例 計算には、 $v = 0.3$, $\kappa = \pi^2/12$ を用い、内部選点数は $//$ とした。なお、選点法の精度は、2, 3の数値解析を行い、十分な精度を有することを確認してある⁷⁾。以下では、殻の形状パラメータには、 a/R (a =半スパン長) を用い整理する。

(1) 基礎式 Case (1)とCase (2)の比較 表一/に、 $a/R = 0.4, 0.6$ に対して、 h/a を 0.0 (薄い場合)、 0.1 (厚い場合) として計算した固有振動数を4次まで示す。表の各ブロックに示した3つの値は、上から浅い理論Case (1)、Case (2) による結果、深い理論による結果である。Case (1)と(2)による値には、 a/R および h/a によらず差異は無く、面内釣合式におけるせん断力

項の役割はそれほど大きくないことがわかる。以下では、浅い球殻理論には Case(1) を用いた。

(2) a/R の固有振動数に及ぼす影響

図-2 に、 $a/R \leq 0.8$ 、 h/a は 0.01 と 0.1 を用いた際の固有振動数(4次まで)を深い理論の結果とともに示す。一般に、各理論による固有振動数の差異は、 a/R およびモード次数 m の増加とともに増大し、特に h/a の大きい場合に顕著である。ところで、従来の浅い球殻理論の適用限界はもっぱら形状パラメーター($H/a, a/R, \Phi$) で整理されているが、ここで例示した数値例からわかるように、殻厚パラメーター(h/a)の影響も無視できないようである。

(3) h/a の固有振動数に及ぼす影響

図-3 に、 $h/a = 0.0025, 0.005, \dots, 0.05$ と変化させた際の、浅い理論に基づく基本固有振動数の深い理論に対する相対誤差を示す。一般に、 h/a および a/R の増加とともに、浅い理論と深い理論との差が大きくなる傾向にあり、浅い理論は比較的小さな h/a および a/R を持つ場合に対してでなければ、正確には適用しがたいようである。ここで、例えば許容誤差を2%と仮定すれば、浅い球殻理論の適用範囲は次のようになる。

$$\begin{aligned} a/R \leq 0.4 \text{ のとき: } h/a \leq 0.05 & \text{-----} (3) \\ 0.4 \leq a/R \leq 0.5 \text{ のとき: } h/a \leq 0.02 & \text{-----} \end{aligned}$$

4. まとめ 軸対称振動問題の解析を通して、浅い球殻理論の適用限界について数値的考察を行った。得られたおもな成果をまとめると以下ようになる。(1) 面内釣合式における面外せん断力の項は、解析結果に大きな影響を与えない。(2) 浅い球殻理論の適用限界は、形状パラメーターのみならず殻厚パラメーターにも依存する。(3) 基本固有振動数から定めた浅い球殻理論の適用範囲は式(3)で与えられる。

以上の結論は限られた数値例より得たものであり、今後は動的応答解析を通して、より実用的な適用限界を明らかにする予定である。

参考文献

- 1) Reisser, E. : On axis-symmetrical vibrations of shallow spherical shells, Q. Appl. Math., Vol. 13, pp. 279-290, 1955.
- 2) Kalnins, A. : Effect of bending on vibrations of spherical shells, J. Acoust. Am., Vol. 36, pp. 74-81, 1964.
- 3) Reismann, H. and P.M. Culkowski : Forced axisymmetric motion of shallow spherical shells, ASCE, Vol. 94, No. EM2, pp 653-670, 1968.
- 4) Leissa, L. W. : NASA SP-288, Vibrations of Shells, 1973.
- 5) 三上 隆・芳村 仁 : 選点法による回転殻の固有振動数の解析, 土木学会論文報告集, 第335号, pp. 69-78, 1983.
- 6) Magrab, E. B. : Vibrations of Elastic Structural Members, Sijthoff and Noordhoff, 1979.
- 7) 三上 隆・芳村 仁 : 浅い球殻理論の適用限界について, 土木学会北海道支部論文報告集, 第41号, pp. 7-12, 1985.

表-1 Q_Φ の固有振動数($a\omega\sqrt{\rho/E}$)に与える影響

Mode Number	Theory	$h/a=0.01$		$h/a=0.1$	
		$a/R=0.4$	$a/R=0.6$	$a/R=0.4$	$a/R=0.6$
1	S1	0.411	0.600	0.629	0.859
	S2	0.411	0.600	0.627	0.854
	D	0.407	0.587	0.617	0.826
2	S1	0.470	0.647	1.194	1.307
	S2	0.470	0.647	1.190	1.300
	D	0.462	0.631	1.136	1.191
3	S1	0.586	0.751	2.323	2.364
	S2	0.586	0.750	2.319	2.355
	D	0.573	0.715	2.208	2.097
4	S1	0.672	0.908	3.738	3.749
	S2	0.672	0.907	3.735	3.741
	D	0.661	0.856	3.566	3.343

S1 = Shallow theory, Case(1)

S2 = Shallow theory, Case(2)

D = Deep theory

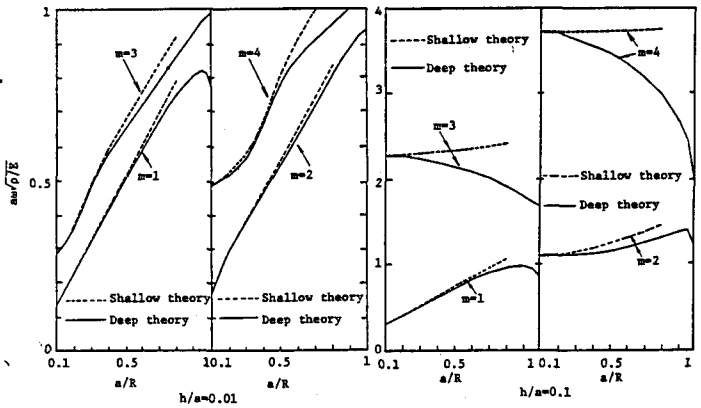


図-2 a/R の固有振動数($a\omega\sqrt{\rho/E}$)に与える影響

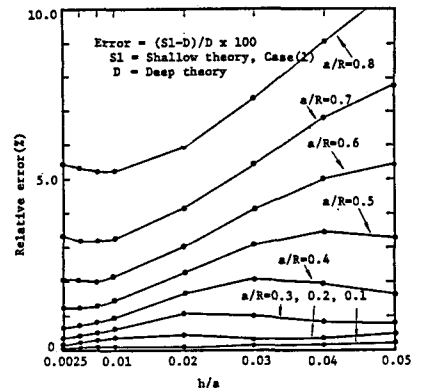


図-3 h/a の基本固有振動数に与える影響