

(株) 本間組 正会員 宮井 隆利
 長岡技術科学大学 正会員 笹戸 松二
 長岡技術科学大学 正会員 林 正

1. まえがき

円筒シェルの座屈解析は、微分方程式を基礎式とし変位を2重フーリエ級数で仮定するなどして古くから行われている。最近では有限要素法によって解かれる例が多いが、大次元マトリックスの固有値問題となり、効率のよい解法とは言えない。本報告では、線形解析で有効性が認められている有限帯板法に線形座屈理論を適用して円筒シェルの座屈解析を行った。また、初期変位がある場合についても計算して、有限変位解析の値と比較した。

2. リング要素による有限帯板法

(1) 解析仮定：1) シェルの変形と応力に関しては、Kirchhoff-Love の仮定が成り立つ。2) 座屈解析では、座屈前のシェルの挙動は線形である。3) 初期変位による影響を考慮する。

(2) リング要素：本報告では、図-1に示すリング要素による有限帯板法によって定式化を行った。

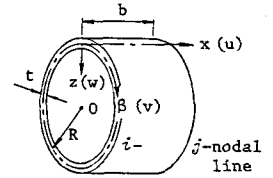


図-1 リング要素

(3) 変位関数：要素の節線自由度を $u, v, w, \partial u / \partial x, \partial v / \partial x, \partial w / \partial x$ の1節線6自由度とする。 x 軸方向の形状関数にはエルミートの3次多項式、 β 軸方向の展開関数には次式で示す三角関数を用いる。

$$U_n = \cos n\beta, \quad V_n = \sin n\beta, \quad W_n = \cos n\beta \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

3. 座屈解析

座屈解析では、初期不整として与えた初期変位による座屈荷重の低下を調べるために、通常の線形座屈解析に用いる幾何剛性行列(初期応力マトリックス) K_G の他に座屈前に生じた全変位による非線形の剛性行列 K_d を用いた。これらの行列は、初期変位を考慮した有限変位理論によって求めた接線剛性行列の1次の非線形剛性行列 $K_1 (= K_G + K_d)$ に等しい。数値計算では、次式の固有値問題を解いた。

$$[K_1 + \lambda(K_G + K_d)] \Delta D = 0 \quad (2)$$

ここに、 K_L は線形の剛性行列、 ΔD は座屈変位である。 K_1 の定式化については文献(2)を参照されたい。

4. 数値計算例

本解析法の妥当性を検証するために、両端で単純支持した円筒シェルについて数値計算を行った。

(1) 計算例1(図-2)：円筒シェルに軸方向圧力 p が作用する場合の座屈解析を行った。解析領域は軸方向に $L/2$

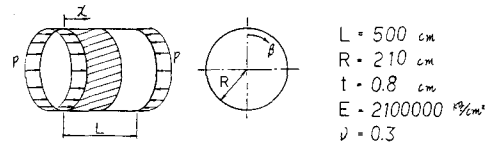


図-2 計算例1

とした。分割数 $M=6$ のとき、仮定した周方向座屈モードにおける座屈荷重 p_{cr}^* と古典座屈理論値 p_{cr}^1 の比を表-1に示す。周方向波数 n を14波としたときに座屈荷重が最小となった。このときの座屈モードを図-3に示す。破線は $n=15$ の場合の座屈モードで、周方向波数が軸方向波数に大きく影響しているのがわかる。また、 $M=10, 15$ とした場合においても座屈荷重は0.3%未満の差であり、座屈モードも $M=6$ のときと一致した。

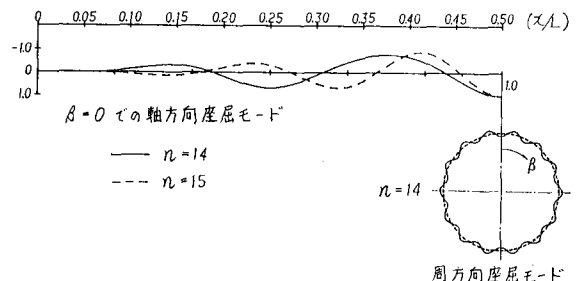


図-3 座屈モード(計算例1)

(2) 計算例2 (図-4) : 円筒シェルに外圧Pが作用する場合の座屈解析を行った。シェルの諸元および解析領域は計算例1と同じである。M=14

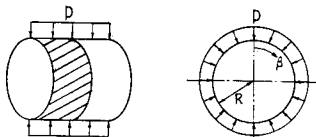


図-4 計算例2

のとき、仮定した周方向座屈モードにおける座屈荷重とMisesの理論値¹⁾との比を表-1に示す。座屈荷重が最小となるのはn=7のときで、Misesの理論¹⁾から得られる周方向波数と一致する。このときの座屈モードを図-5に示す。

表-1 座屈荷重(計算例1,2)

Ex. 1				Ex. 2			
n	P_{cr}^*/P_{cr}	n	P_{cr}^*/P_{cr}	n	P_{cr}^*/P_{cr}	n	P_{cr}^*/P_{cr}
3	1.1717	12	1.0209	3	32.1894		
4	1.1717	13	1.0076	4	7.8513		
5	1.1717	14	1.0001	5	2.4708		
6	1.1699	15	1.0007	6	1.2774		
7	1.1544	16	1.0156	7	1.0421		
8	1.1388	17	1.0467	8	1.1007		
9	1.1229	18	1.0935	9	1.2785		
10	1.0880	19	1.1549	10	1.5200		
11	1.0486	20	1.1717				

(3) 計算例3 : 初期変位がある円筒シェルに軸方向圧力が作用する場合の座屈解析を行った。初期変位には、古典座屈理論¹⁾による座屈モードを用いることにし、次式で仮定した。

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= a_0 \sin(m\pi x/L) \cos(n\beta) \\ \theta_0 &= a_0 (m\pi/L) \cos(m\pi x/L) \cos(n\beta) \end{aligned} \right\} (3)$$

ここに、mは軸方向の半波数、nは周方向の波数、 a_0 はモードの最大振幅である。数値計算では、 $m=3$ 、 $n=9, 14, 15$ 、 $a_0=t, 2t$ とした初期変位 w_0 と θ_0 を与えた。初期変位がない場合は、周方向波数つまりそれぞれnが達成することはなかったが、初期変位がある場合は達成する級数項が現われる。そこで、展開項数 $K=5$ とし、与える初期変位のnの整数倍の級数項を採用した。n=9に対しては0, 9, 18, 27, 36の級数項、n=14に対しては0, 14, 28, 42, 56の級数項、n=15に対しては0, 15, 30, 45, 60の級数項となる。このときの座屈

表-2 座屈荷重
荷重と古典座屈理論値¹⁾との比を表-2に示す。また、n=14、 $a_0=t$ のときの座屈モードを図-6に示す。この

場合、軸方向波数が変化し、与えた初期変位と同じ半波の座屈モードとなった。次に、本解析法による座屈荷重と有限変位解析²⁾による荷重-変位曲線とを図-7に示し、比較を行った。 $a_0=t$ で4.9%、 $a_0=2t$ では3.7%程度の差となった。このように、本解析法では初期変位の影響を考慮した座屈解析が可能であり、初期変位による座屈荷重の低下を容易に調べることができる。

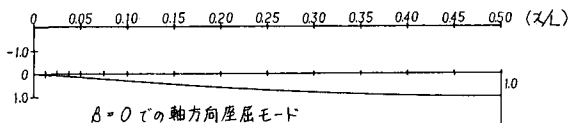


図-5 座屈モード(計算例2)

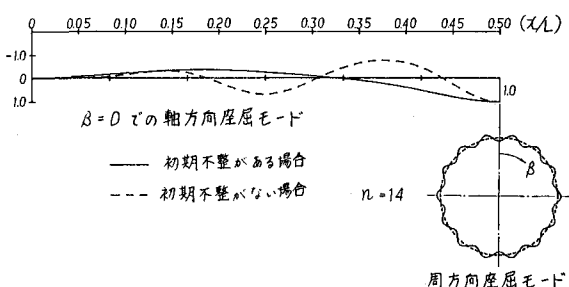


図-6 座屈モード(計算例3)

a_0	n	P_{cr}^*/P_{cr}
t	9	0.4501
t	14	0.3738
t	15	0.3696
2t	9	0.2400
2t	14	0.1988
2t	15	0.1948

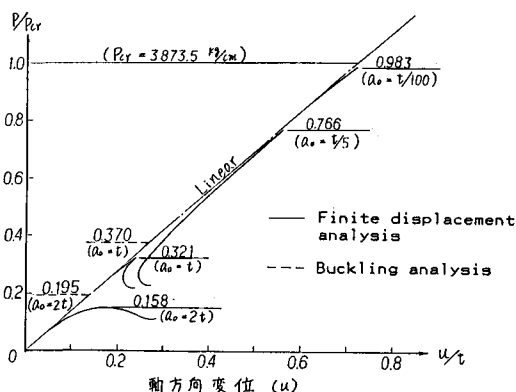


図-7 荷重-変位曲線(計算例3)

1) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, 1961.

2) 笹戸 林 : 有限帯板法による薄肉円筒殻の後座屈解析, マトリックス解析法研究発表論文集, JSSC 第17回大会, 1983.