

九州大学 工学部 正会員 高海克彦
彦坂 照

1. まえがき

薄肉閉断面ばりの断面変形挙動をばり理論で論じたもののうち、特にDabrowskiやVlasovの先駆的研究がよく知られ、これらを基にしてダイアフラム等の中間補剛材の設計への応用もなされてきた。しかし、対象とされる断面は比較的簡単な四角形断面がほとんどで、任意多角形単室閉断面について、一般のばり理論と対応させてはあまり論じられていない。筆者らは、薄肉閉断面曲りばりの断面変形の定式化を先に発表したが、本研究も同じ立場で、即ち基本解析は断面剛を仮定するばりの曲げねじり理論で行ない、断面変形に伴う付加変位場の仮定を出発点として任意多角形薄肉単室閉断面直線ばりの断面変形挙動の定式化を試みにしたのである。

2. 断面変形の定義と自由度

図-1のようなN枚の薄板要素からなるN角形単室閉断面ばりを考える。板厚は各薄板要素内では一定とし、薄板の接合点を節点と呼ぶ。断面内に同心Cを原点とする右手系直交座標系 (x, y, z) と薄板中心に沿う直交曲線座標系 (n, s) を設ける。断面変形に伴う薄板要素の反時計回りの回転角を ρ_i ($i=1, 2, \dots, N$)として、断面変形をN個の相対回転角 θ_i ($i=1, 2, \dots, N$)で次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \rho_i - \rho_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \\ \theta_N &= \rho_N - \rho_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

θ_i は板要素iの板要素i+1に対する反時計回りの相対回転角を表す。本理論では薄板要素の板厚中心線の軸直角方向伸縮を無視し、また断面の閉合条件より断面変形 θ_i は互に独立でなく、次の条件を満たさねばならない。

$$\sum_{i=1}^N \theta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N (x_i - x_N) \theta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N (y_i - y_N) \theta_i = 0 \quad (2)$$

ここに、 (x_i, y_i) 、 (x_N, y_N) はそれぞれ節点iおよび節点Nのx, y座標。

従ってN個の相対回転角 θ_i は3個の付帯条件を有し、結局断面変形の自由度は $N-3$ となる。

3. 断面変形の変位場

断面変形に伴うせん断中心 $S(x_s, y_s)$ のx, y方向剛体付加変位を u_s, v_s 、剛体付加回転角を φ とし、 $N-1$ 個の断面変形 θ_i を用いれば、断面上の任意点のx, y方向付加変位 u, v は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s(z) - (y - y_s) \varphi(z) - \sum_{i=1}^{N-1} (y - y_i) \mu_i \theta_i(z) \\ v &= v_s(z) + (x - x_s) \varphi(z) + \sum_{i=1}^{N-1} (x - x_i) \mu_i \theta_i(z) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\text{ただし、} \mu_i(\lambda) = \begin{cases} 1 & (\lambda \leq \lambda_i) \\ 0 & (\lambda > \lambda_i) \end{cases}$$

ここに、 λ_i は節点iのs座標、

軸方向付加変位を w 、 λ 方向付加変位を r として、閉断面を構成する薄板中央面内付加せん断ひずみ τ_{zs} を次のように仮定する。

$$\tau_{zs} = 2w/\lambda + 2r/\lambda z = \bar{\tau}/Gt \quad (4)$$

ここに、 $\bar{\tau}$ は z のみの関数、 G はせん断弾性係数、 t は板厚。

閉断面における w の連続条件から、 $\bar{\tau}$ は次のようになる。

$$\bar{\tau} = Gt \varphi' + G \sum_{i=1}^{N-1} r_{\lambda i} \theta_i \quad (5)$$

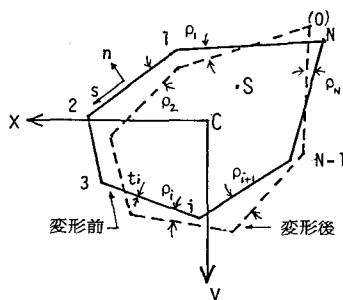


図-1 任意単室閉断面

ここに、 $k = 2\Omega/\oint \frac{1}{r} ds$, $k_i = 2\Omega_i/\oint \frac{1}{r_i} ds$, $2\Omega = \oint r_n ds$, $2\Omega_i = \oint r_{ni} ds$, r_n , r_{ni} はそれぞれ断面中心 S および節点 i から任意点 n に引いたベクトルの n 方向成分, $(\cdot)'$ は s に関する微係数。

式(5)を考慮すれば, w が次のように表わされる。

$$w = w_c(z) - u_s' x + v_s' y + \omega(\alpha) \varphi + \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i(\alpha) \theta_i'(z) \quad (6)$$

ここに, w_c は圆心 C の w , $\omega(\alpha)$ と $\psi_i(\alpha)$ はそれぞれねじりの単位ソリ関数および断面変形ソリ関数。

4. 断面変形による応力

断面変形に伴う応力として, 式(6), (5) から軸方向付加垂直応力 $\sigma_z (= E \frac{\partial w}{\partial z})$ と σ_θ につりあうせん断応力および St. Venant のねじりによるせん断応力 $\tau_{\theta z} (= \tau_{z\theta})$ を考えるが, 付加応力の自己平衡条件より, u_s , v_s , w_c , φ は消去され, σ_z は次のように θ_i のみで表わされる。

$$\sigma_z = E \sum_{i=1}^{N-1} (\psi_i(\alpha) \theta_i'' + \Phi_i(\alpha) \theta_i'''), \quad \tau_{z\theta} = (\frac{1}{2} \Omega) \sum_{i=1}^{N-1} E H_{i\theta} \theta_i''' \quad (7)$$

ここに, $\psi_i(\alpha)$, $\Phi_i(\alpha)$, $H_{i\theta}$ は断面形状によって決まる既知関数と定数, E はヤング係数。

また, 閉断面から単位幅1の開ラメンを切り出し, 断面変形に伴う軸直角方向曲げモーメントは次式で表わされる。

$$M_\theta = \sum_{i=1}^{N-1} M_{\theta i}(\alpha) \theta_i \quad (8)$$

ここに, $M_{\theta i}$ は $\theta_i = 1$ のみによってラメンに生じる曲げモーメント。

5. フリあい方程式

長さ L の部材に作用する単位表面積当りの外力の x , y , z 方向成分を p_x , p_y , p_z とし, 内力を式(7), (8) とする。式(2) の付帯条件式のうち後の2式に Lagrange の未定乗数 λ_1 , λ_2 を導入し, 断面変形問題の仮想仕事式を立てれば, θ_i ($i=1, 2, \dots, N-1$) と λ_1 , λ_2 を未知数とする次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ E (J_{ij} + J_{ji} - \frac{H_{i\theta} H_{j\theta}}{GJ}) \theta_i^{(4)} + E I_{ij} \theta_j^{(4)} + f_{ij} \theta_j \right\} \\ & - \int_0^L (r_{ni} u_i - \frac{r_{zi}}{x} ds) - 2 \Omega_i \oint \frac{1}{r} ds - \int_0^L (p_x r_{ni} - p_y r_{zi}) u_i ds + \lambda_1 (x_i - x_n) + \lambda_2 (y_i - y_n) = 0 \quad (9) \\ & (\lambda = 1, 2, \dots, N-1) \end{aligned}$$

ここに, J_{ij} , J_{ji} , I_{ij} , f_{ij} は断面形によって決まる定数であり, r_{ni} は節点 i から断面上の任意点 n に引いたベクトルの n 方向成分, $\oint \frac{1}{r} ds$, $\oint \frac{1}{r_i} ds$ はそれぞれ断面剛を仮定するはり理論による垂直応力につりあうせん断流および St. Venant のねじりによるせん断流, J は純ねじり定数。

6. 数値計算例

多角形断面の最も簡単な例として, 図-2 のように長さ L で一辺 a の正方形断面の対角線に沿って単位長さ当りの等分布荷重をかける。両端は断面変形に対しては剛とし, 単純支持する。このモデルは, 断面剛を仮定するはり理論では変位および応力は生じない。

図-3 は無次元化して $L/a = 15$, $a/x_0 = 40$ としたときの節点1の断面変形 θ とそれに伴う付加垂直応力 σ_θ の軸方向変化を表わす。

<参考文献>

1) 彦坂・高海: 薄肉開断面曲りばりの断面変形挙動の定式化, 土木学会論文集, 第356号/E-3, 昭和64年4月

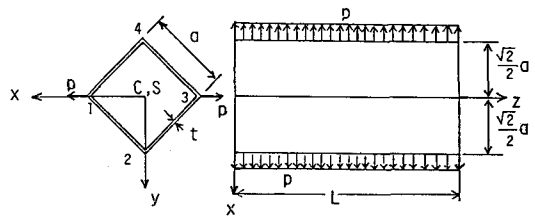


図-2 計算モデル

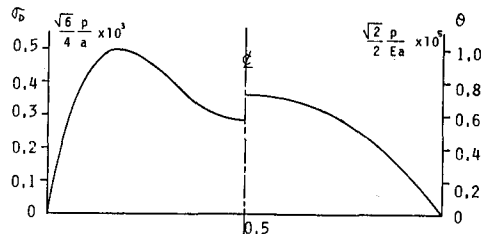


図-3 θ と σ_θ の軸方向変化