I-42　有限群論による分岐座屈現象の解釈

長岡技術科学大学　正員　池田清宏

対称荷重を受ける対称ドームが分岐座屈現象を起こす事は一般によく知られており、分岐座屈点並びに分岐経路を求める計算手法、計算例等が数多く報告されている。例えば、西野ら1）は固有値解析に基づく分岐解析手法を提案し、数値解析例として、図１に示す２１自由度のトラスドームの釣り合い経路を求めている（図２参照）。この図に示すように、対称ドームの分岐座屈は多くの分岐経路、及び分岐経路から更に枝別れする経路等を有する非常に複雑な現象である。既往の研究ではこの現象を追跡する計算手法に重点が置かれて来た。これに対し、本報告では、分岐座屈現象の定性的な解釈、分岐経路の数学的な意味並びにその分類を、対称群（有限群の一種）という数学的概念に基づいて行なう。

藤井２）は、分岐現象を群対称性の崩壊を伴う対称性破壊現象と解釈し、有限群論を用いた理論を展開している。藤井の結果を要約すると、Ｇをある対称群とするとき、

（１）　Ｇ自身を対称群として持つ経路は、基本経路と呼ばれる。

（２）　経路は、分岐点に達するまでは自身の対称群を保存する。

（３）　単純分岐点では、その経路の部分群を対称群として持つ経路が分岐する。

（４）　自明な対称群　$E=\langle e\rangle$ しか持たない経路上の単純特異点は、一般には飛び移り点である。

ここに、対称群とは置換の集合により生成される群であり（例、２次の対称群は２次の置換 $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$と $\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ から成り立つ群である）、ｅは単位元を表わす。

この理論をトラスドームの分岐経路の分類に適用する。図３に示すように、分岐経路に対応するトラスドームの幾何学てき変形特性はこのドームの節点１－６の鉛直方向相対変位により代表される。そこで、対称群として、図４に示す回転群D_6：正６角形をそれ自身に移す変換から成る群を考える。この群は点Ｏ回りの回転移動$e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$とＹ軸に関する鏡映$\tau$から生成される１２個の元から成る群である。この群Ｄ　は下記の８個の部分群を持つ。

$$
\begin{array}{lll}
D_3=\langle e,\sigma_2,\sigma_4,\tau,\tau\sigma_2,\tau\sigma_4\rangle & D_2=\langle e,\sigma_3,\tau,\tau\sigma_3\rangle & D_1=\langle e,\tau\rangle \\
C_6=\langle e,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5\rangle & C_3=\langle e,\sigma_2,\sigma_4\rangle & C_2=\langle e,\sigma_3\rangle \\
F_2=\langle e,\tau\sigma_3\rangle & E=\langle e\rangle &
\end{array}
\tag{1}
$$

この８個の部分群の間には

$$
D_3\supseteq D_1\supseteq E \qquad D_2\supseteq D_1\supseteq E \qquad D_2\supseteq C_2\supseteq E \qquad D_2\supseteq F_2\supseteq E \tag{2}
$$

等の関係がある。ここに、$S\supseteq T$はＴがＳの部分群であることを表わす。

トラスドームの釣り合い経路の性状をこの対称群を用いて調べた結果、下記の結論に達した。経路Ｏに対応するトラスドームの形状は対称群D_6 に属する全ての元による変換に対し不変に保たれている。すなわち、経路ＯはD_6 を対称群として持っており、藤井の結果(1) より経路Ｏは基本経路であることが分かる。更に、分岐経路Ａは部分群D_3 ，Ｂは部分群D_2 、Ｃ１はD_1 、Ｃ２はF_2 をそれぞれ対称群として持っている。どうように、図２に示す釣り合い経路を、それぞれの経路が持つ対称群に応じて分類し、図５に図式的に示す。この結果、全ての経路が必ずある対称群を有しており、その分岐過程は式(2) に示すD_6 の部分群の構造と完全に相似であることが判明した。例えば、経路Ｂから経路Ｂ１、更に経路Ｂ11が分岐する現象は、群論的表現では$D_2\supseteq D_1\supseteq E$と表わされる。また、藤井の結果(2) (3) も満足されていることが確認された。さらに、自明な対称群　$E=\langle e\rangle$ しか持たない経路Ｂ11上の単純特異点は、全て飛び移り点（荷重の極大、極小点）であることが示され、結果(4) も確認された。

以上の議論に示すように、このトラスドームの分岐座屈現象は６次の回転群D_6 により、完全に記述されている。この手法の有利な点として（１）固有値解析等の大掛かりな計算を行なうことなく、構造

物の可能な座屈波形を予想出来ること、（2）分岐経路の分類が数学的に行なえること等が挙げられる。この手法の理論的汎用性・妥当性を確立し、実際の構造物解析・設計等に適用する事が今後の課題である。

1）A Total Lagrangian Nonlinear Analysis of Elastic Trusses, 土木学会論文集 Oct. 1984
Fumio Nishino, Kiyohiro Ikeda, Takamasa Sakurai, and Akio Hasegawa

2）自然界の縞模様（群論と非線形力学）、数学セミナー増刊、入門・現代の数学 I 、Oct. 1984 藤井宏

Table 1　Vertical loading pattern.

Joint NO.	Pattern (a)
a	1.0
b	0.0
c	0.0
d	0.0
e	0.0
f	0.0
g	0.0

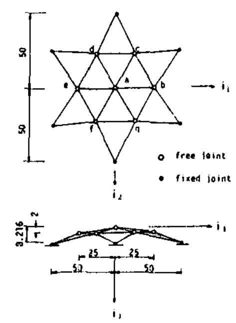

図1　トラスドーム

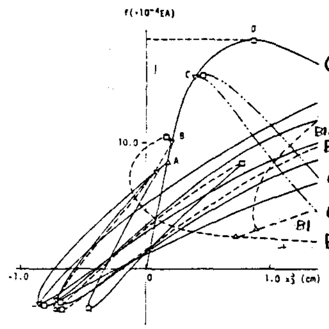

図2　トラスドームの釣合径路

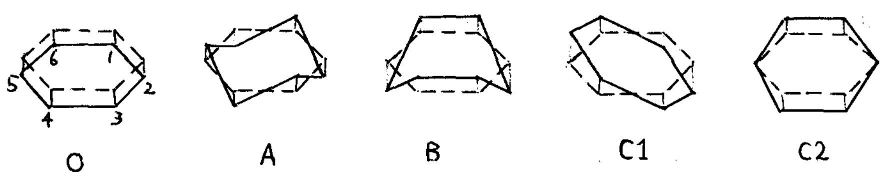

図3　トラスドームの節点 1～6 の鉛直方向変位

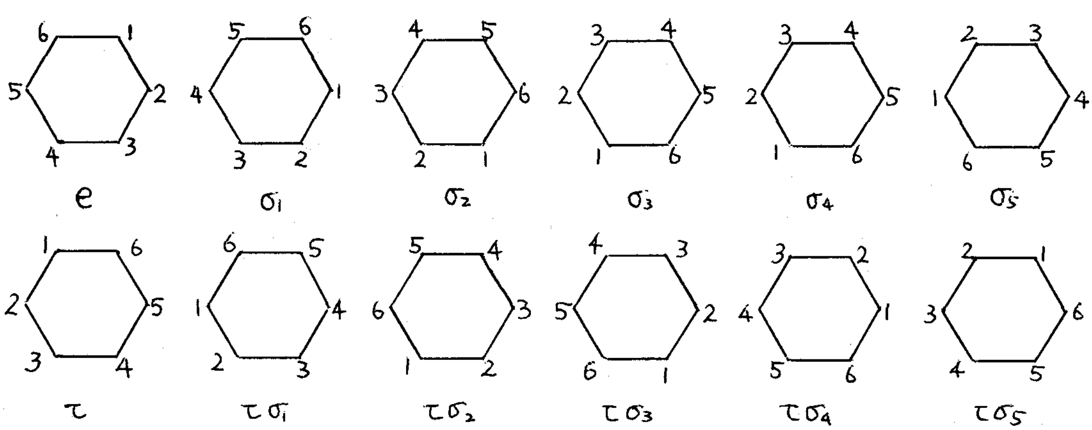

図4　回転群 D_6 の12個の元

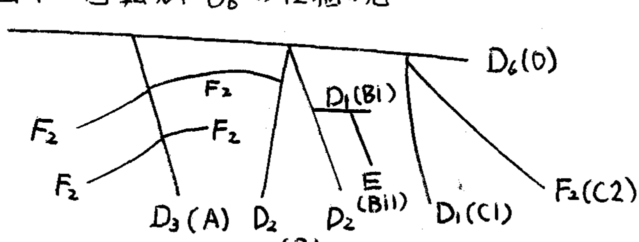

図5　釣合径路の群論的説明