

I-40 有限回転を伴う充実空間曲線棒部材の変位関数

東京電機大学 正員 井浦 雅司

1)-6)

1. はじめに 充実曲線棒の有限変位理論は、これまで様々な手法により展開されており、中でも、有限回転はベクトル則に従わないことから、有限回転を正しく評価することが大きな課題であった。棒部材の任意点における変形は、Bernoulli - Euler の仮定に従う時、4 個のパラメーターで記述できるが、そのパラメーターとしてどのような成分を用いるかは自由であり、後の理論展開が容易となるように選ばれている。従来の微小変位理論では、部材軸上の変位成分の他に横断面の回転角を4 番目のパラメーターとして用いる場合が多い。しかしながら、有限変位理論では4 番目のパラメーターをどのように定義するかが大きな問題となり、これまでも様々な回転成分が用いられている。

本報告では、従来多く用いられている3 種類の有限回転ベクトルを用いて、有限回転の連成を正しく評価した充実空間曲線棒部材の変位関数を誘導することを試みている。その際に、4 番目の回転に関するパラメーターとしては、それぞれの有限回転ベクトルに対して適当と思われる回転成分を選んでいる。なお、本報告で用いる仮定は以下の通りであり、変位およびひずみの大きさには何の制限も設けていない。

- (I) 部材断面は部材軸に沿って一定であり、その形状は反り変形が無視できるものとする。
- (II) 変位前の部材軸は、任意の初期ねじれ率と初期曲率を有する滑らかな空間曲線である。
- (III) 変位前に部材軸に垂直な平面は、変位後の部材軸に対しても垂直で平面を保つものとする。

2. 有限回転ベクトル 部材軸に沿って ξ^1 座標系を、横断面における主軸方向に ξ^2 ， ξ^3 座標をとり、それぞれの基底ベクトル $\underline{e}_m$ とする。この時、Frenet-Serret の公式より

$$\underline{e}_{1,1} = \kappa_3 \underline{e}_2 - \kappa_2 \underline{e}_3, \quad \underline{e}_{2,1} = -\kappa_3 \underline{e}_1 + \kappa_1 \underline{e}_3, \quad \underline{e}_{3,1} = \kappa_2 \underline{e}_1 - \kappa_1 \underline{e}_2 \quad \text{-----(1)}$$

となり、ここに $(\cdot)_{,1}$ は ξ^1 に関する微分を、 κ_1 は初期ねじれ率を、 κ_2 、 κ_3 は初期曲率を示す。

Pietraskiewiczによれば、⁷⁾既往の研究で多く用いられる有限回転ベクトルには以下の3つがある。

$$\omega = \omega \phi, \quad \Omega = \sin \omega \phi, \quad \theta = 2 \tan \frac{\omega}{2} \phi \quad \text{-----(2)}$$

ここに、 ϕ は回転方向の単位ベクトル、 ω はその回転軸回りの全回転量である。なお、回転行列は有限回転ベクトル ω と等価である。仮定(III)より、変位後の ξ^i 座標系の単位基底ベクトル $\bar{e}_i$ は直交していることから、変位後の単位基底ベクトル $\bar{e}_m$ と e_m との間には以下の関係式が成り立つ。

$$\bar{e}_m = e_m + \frac{1}{\omega} \sin \omega \omega \times e_m + (1 - \cos \omega) \frac{1}{(\omega)^2} \omega \times (\omega \times e_m) \quad \text{-----(3)}$$

$$\bar{e}_m = e_m + \Omega \times e_m + \frac{1}{(1 + \cos \omega)} \Omega \times (\Omega \times e_m) \quad \text{-----(4)}$$

$$\bar{e}_m = e_m + (1 + \cos \omega) / 2 \theta \times e_m + (1 + \cos \omega) / 4 \theta \times (\theta \times e_m) \quad \text{-----(5)}$$

ここで、それぞれの有限回転ベクトルを成分表示して以下のようにおく。

$$\omega = \omega^i e_i \quad \text{-----(6)} \quad \Omega = \Omega^i e_i \quad \text{-----(7)} \quad \theta = \theta^i e_i \quad \text{-----(8)}$$

式(6) ~ (8)を式(3) ~ (5)に代入して e_1 を求めるそれぞれ以下のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 = & [1 - (1 - \cos \omega) \{1 - \frac{(\omega^1)^2}{(\omega)^2}\}] e_1 + [\frac{\omega^1 \omega^2}{(\omega)^2} (1 - \cos \omega) + \frac{\omega^3}{\omega} \sin \omega] e_2 \\ & + [\frac{\omega^1 \omega^3}{(\omega)^2} (1 - \cos \omega) - \frac{\omega^2}{\omega} \sin \omega] e_3 \quad \text{-----(9)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 = & [1 - \frac{1}{(1 + \cos \omega)} \{(\Omega^2)^2 + (\Omega^3)^2\}] e_1 + [\Omega^3 + \frac{\Omega^1 \Omega^2}{(1 + \cos \omega)}] e_2 \\ & + [-\Omega^2 + \frac{\Omega^1 \Omega^3}{(1 + \cos \omega)}] e_3 \quad \text{-----(10)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 = & [1 - \frac{1}{4} (1 + \cos \omega) \{(\theta^2)^2 + (\theta^3)^2\}] e_1 + \frac{1}{2} (1 + \cos \omega) (\theta^3 + \frac{\theta^1 \theta^2}{2}) e_2 \\ & + 1/2 (1 + \cos \omega) (-\theta^2 + \frac{\theta^1 \theta^3}{2}) e_3 \quad \text{-----(11)} \end{aligned}$$

3. 回転成分と変位成分との関係 変位後の単位基底ベクトル e_1 は式(9) ~ (11)とは別に

$$\bar{e}_1 = [(1 + u^1) e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3] / \sqrt{G_0} = u^1 \underline{1}_1 e_1 + u^2 \underline{1}_1 e_2 + u^3 \underline{1}_1 e_3 \quad \text{-----(12)}$$

と表わすことができ、ここに $u = u^i e_i$ は部材軸の変位ベクトルであり、 $()_1$ は ξ^1 に関する共変微分を、 $G_0 = (1 + u^1_1)^2 + (u^2_1)^2 + (u^3_1)^2$ ----- (13) である。

式(9) ~ (11) と式(12)より、それぞれの回転成分と変位成分 u^i との間に次の関係式が得られる。

$$1 - (1 - \cos \omega) \{ 1 - \frac{(\omega^1)^2}{(\omega)^2} \} = u^1_1, \quad \frac{\omega^1 \omega^2}{(\omega)^2} (1 - \cos \omega) + \frac{\omega^3}{\omega} \sin \omega = u^2_1$$

$$\frac{\omega^1 \omega^3}{(\omega)^2} (1 - \cos \omega) - \frac{\omega^2}{\omega} \sin \omega = u^3_1$$
----- (14)

$$1 - [(\Omega^2)^2 + (\Omega^3)^2] \frac{1}{(1 + \cos \omega)} = u^1_1, \quad \Omega^3 + \frac{\Omega^1 \Omega^2}{(1 + \cos \omega)} = u^2_1$$

$$- \Omega^2 + \frac{\Omega^1 \Omega^3}{(1 + \cos \omega)} = u^3_1$$
----- (15)

$$1 - \frac{1}{4} (1 + \cos \omega) \{ (\theta^2)^2 + (\theta^3)^2 \} = u^1_1, \quad \frac{1}{2} (1 + \cos \omega) (\theta^3 + \frac{\theta^1 \theta^2}{2}) = u^2_1$$

$$\frac{1}{2} (1 + \cos \omega) (-\theta^2 + \frac{\theta^1 \theta^3}{2}) = u^3_1$$
----- (16)

ここで、回転成分を未知数にとると、式(14) ~ (16) はそれぞれ3本の式からなることより、回転成分は変位成分 u^i により表わされるように思われる。しかしながら、式(2), (6) ~ (8) により式(14) ~ (16) においてそれぞれ独立な式は2本であることが容易にわかり、未知数が1つ多いことになる。そこで従来の棒理論と同様に、横断面の回転成分に関する e_1 軸回りの回転成分を新たなパラメーターにとることを考える。ここでは、式(2)を考慮して

$$\omega^1 = \alpha \quad \text{----- (17)} \quad \Omega^1 = \sin \psi \quad \text{----- (18)} \quad \theta^1 = 2 \tan \frac{\delta}{2} \quad \text{----- (19)}$$

と定義される新たなパラメーター α, ψ, δ を導入する。そして、式(17) ~ (19) を式(14) ~ (16) に代入して、残りの回転成分である ω^2, ω^3 を $u^i \cdot \alpha$ で、 Ω^2, Ω^3 を $u^i \cdot \psi$ で、 θ^2, θ^3 を $u^i \cdot \delta$ で表わせば、変位後の単位基底ベクトル e_m は4個のパラメーターで表わされ、その結果、変位関数も求まる。

4. 変位関数 任意点の変位ベクトルを V とすれば、仮定(Ⅲ)より V は以下のように表わせる。

$$V = u + \xi^2 (\bar{e}_2 - e_2) + \xi^3 (\bar{e}_3 - e_3) \quad \text{----- (20)}$$

ここで、変位成分 u^i とそれぞれの回転成分 $\omega^i, \Omega^i, \theta^i$ を用いれば、式(3) ~ (5) よりどの有限回転ベクトルを用いても変位ベクトル V は求まる。しかし、既述したように、独立パラメーターの数は4個であり、それらを用いて変位関数を表わす必要がある。ところが、式(14)より $\omega^2 \cdot \omega^3$ を $u^i \cdot \alpha$ で表わすことは難しく、有限回転ベクトル ω あるいは回転行列を用いた場合には、4個のパラメーターにより変位関数を表わすことは困難と思われる。一方、式(15)より、 $\Omega^2 \cdot \Omega^3$ は $u^i \cdot \psi$ により

$$\Omega^2 = (u^2_1 + A_0 u^3_1) / (1 + A_0^2), \quad \Omega^3 = (A_0 u^2_1 - u^3_1) / (1 + A_0^2) \quad \text{----- (21)}$$

と求まり、ここに

$$A_0 = \sin \psi / (1 + \sqrt{\cos^2 \psi - B_0}), \quad B_0 = \frac{1}{2} (1 - u^1_1) \{ 1 + u^1_1 + \sqrt{(1 + u^1_1)^2 - 4 \sin^2 \psi} \} \quad \text{----- (22)}$$

である。また、式(16)より $\theta^2 \cdot \theta^3$ は $u^i \cdot \delta$ により

$$\theta^2 = \lambda \{ u^2_1 \sin \delta / (1 + \cos \delta) - u^3_1 \}, \quad \theta^3 = \lambda \{ u^2_1 + u^3_1 \sin \delta / (1 + \cos \delta) \} \quad \text{----- (23)}$$

と求まり、ここに $\lambda = 2\sqrt{G_0} / (\sqrt{G_0} + 1 + u^1_1)$ ----- (24) である。以上により、有限回転ベクトルとして Ω, θ を用いた場合には、4つのパラメーターにより変位関数が表わされることがわかる。

5. おわりに 本報告では3種類の有限回転ベクトルを用いて有限回転を伴う充実空間曲線棒部材の変位関数の誘導を試みた。その結果、回転行列と等価な有限回転ベクトル ω を用いた時には、パラメーターの数を4個に低減する段階で変位関数の誘導が難しくなることがわかった。一方、有限回転ベクトル Ω, θ を用いた時には、4つのパラメーターにより変位関数が求まり、これらを用いて充実空間曲線棒部材の基礎式を誘導することが可能となる。

6. 参考文献 (1) 前田・林：土木学会論文報告集, №253, pp. 13-27, 1976. 9. (2) 倉方・西野：土木学会論文報告集, №317, pp. 15-30, 1982. 1. (3) Schröder: Ing.-Arch., 39. Band, 1970. (4) 平嶋・井浦・依田：土木学会論文報告集, №292, pp. 13-27, 1979, 12. (5) 島田：土木学会論文報告集, №72, pp. 1-16, 1961. 7. (6) 阿井・西野：土木学会論文報告集, №318, pp. 7-20, 1982. 2. (7) Pietraszkiewicz & Badur: Int. J. Engng. Sci., Vol. 21, No. 9, pp. 1097-1115, 1983.