

名古屋工業大学 学生員 山下 時治

名古屋工業大学 正 員 後藤 芳顕

名古屋工業大学 正 員 松浦 聖

1. まえがき: 軸線方向力のみを受ける軸線の不伸張変形を仮定した平面棒材の有限変位問題の解が、楕円積分で表現されることは、古くから、エラスティカ問題の名で知られている。¹⁾ 著者らは、平面棒材に関して、エラスティカの式より精度の高い軸線の伸張変形を考慮した一般的な支配方程式を導き、これらの一般解も積分で表現されることをすでに一部示している。²⁾ しかしながら、これらの積分は楕円積分のいわゆる標準形による表示までに至っていないので、エラスティカの解との対応がつきにくい。また、計算を行う場合にも通常の数値積分によらねばならず、収束解を得るには膨大な計算量を必要とするという問題を有している。本報告では、精度の良い解が効率良く得るためと、標準形で表現されたエラスティカ問題の解との対応をつけるために、一般解を楕円積分の標準形へ変換する方法について検討し、さらにその標準形による表現について考察を行う。

2. 解の積分表示: Table-1の支配方程式を文献2)の方法で積分すると、Fig-1で示される*i*節点と*i*+1節点の物理量、いわゆる一般解が積分によってTable-2のように表わされる。ここで、物理量はすべて無次元化されており、添字*i*、*i*+1がそれぞれ対応する節点の諸量であることを示している。また、表中の関数*f*の符号はモーメント*M*の正負と逆の符号を取る。

3. 楕円積分による解の表現: Table-2の積分を楕円積分の標準形に変換する。このとき、すべての積分形は有限ひずみの積分形を一部省略することにより得られるのでこの有限ひずみの場合について楕円積分の標準形への変換方法を示す。有限ひずみの積分形は一般に次式によって表わすことができる。

$$I = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} R[C, S, CS, C^2, S^2] / \sqrt{a_0 + a_1 C + a_2 S + a_3 C^2 + a_4 CS + a_5 S^2} d\alpha \quad (1)$$

$a_0 \sim a_5$: Table-2の無次元量で表わされる定数, C, S : Table-2の脚注参照 $R[a, b, c, \dots]$: $a, b, c, \dots$ による有理関数

式(1)を変数変換 $\alpha = \tan \theta$ を行うことにより、次のように表す。

$$I = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} R[t] / \sqrt{b_0 t^4 + b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3 t + b_4} \quad (2)$$

$b_0 \sim b_4$: $a_0 \sim a_5$ の線形結合によって表わされる定数

式(2)を文献3)に示される方法でTable-3に示す楕円積分の標準形へ変換を行う。Table-2に現われる積分に対して具体的に標準形で表わすと次のようになる。

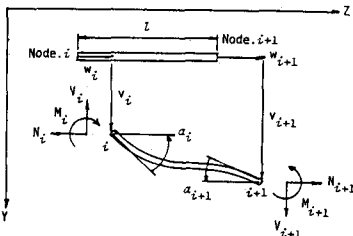


Fig-1 Physical Quantities

Table-1 Governing Equations

Theories	Equilibrium Equations	Stress Resultants vs. Displacements
a) Finite Strains with Finite Displacements	$(N \sin \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha)' = 0$ $(M \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha)' = 0$	$N = EA(\sqrt{g_0} - 1)$ $M = -EI\alpha'$
b) Small Strains with Finite Displacements	$(N \sin \alpha + M' \cos \alpha)' = 0$ $(M \cos \alpha - M' \sin \alpha)' = 0$	$N = EA(\sqrt{g_0} - 1)$ $M = -EI\alpha'$
c) Inextensional Finite Displacements (Elastica)	$(N \sin \alpha + M' \cos \alpha)' = 0$ $(M \cos \alpha - M' \sin \alpha)' = 0$	$\sqrt{g_0} = 1$ $M = -EI\alpha'$

Remarks; The following notations are used throughout Tables presented as E = Young's Modulus, A = Cross Sectional Area, I = Moment of Inertia, N = Axial Stress Resultant

Table-2 Integral Expressions for the Solutions of Table-1

Integral expressions			
	$l = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{1}{f} d\alpha$	$\frac{w_{i+1}}{l} = \frac{w_i}{l} + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{Kw \cdot C - 1}{f} d\alpha$	$\frac{V_{i+1}}{l} = \frac{V_i}{l} + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{Kv \cdot S}{f} d\alpha$
	$A_{i+1} = A_i + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{Km}{f} (B_i \cdot S - C_i \cdot C) d\alpha$	$B_{i+1} = B_i$	$C_{i+1} = C_i$
Theories	Finite Strains with Finite Displacements	Small Strains with Finite Displacements	Inextensional Finite Displacements
f	$\pm(A_i^2 - 2B_i(C - C_i) - 2C_i(S - S_i))$ $-\frac{B_i^2 C_i^2}{2r^2} (s_2^2 - s_i^2) - \frac{B_i^2 C_i^2}{2r^2} (c_2^2 - c_i^2)$	$\pm(A_i^2 - 2B_i(C - C_i) - 2C_i(S - S_i))^{1/2}$	$\pm(A_i^2 - 2B_i(C - C_i) - 2C_i(S - S_i))^{1/2}$
Kw Kv Km	$Kw = Kv = Km = \sqrt{g_0}$	$Kw = Kv = \sqrt{g_0}$ $Km = 1.0$	$Kw = Kv = Km = 1.0$

Remarks; $\frac{M_i}{EI} = A_i, \frac{M_{i+1}}{EI} = A_{i+1}, \frac{V_i}{EI} = B_i, \frac{V_{i+1}}{EI} = B_{i+1}, C_i = \cos \alpha_i, C_{i+1} = \cos \alpha_{i+1}, S_i = \sin \alpha_i, S_{i+1} = \sin \alpha_{i+1}, c_2 = \cos 2\alpha_i, c_{i+1} = \cos 2\alpha_{i+1}, s_2 = \sin 2\alpha_i, s_{i+1} = \sin 2\alpha_{i+1}, l$: length of beam element $i, i+1$ before deformation $\sqrt{g_0} = 1 + (B_i C_i + C_i^2 S_i^2) / l^2 r^2$

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} 1/f \, d\alpha = e_1 I_1, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (kwC-1)/f \, d\alpha = e_2 I_1 + e_3 I_3 + S_1, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} kv \cdot s/f \, d\alpha = e_4 I_1 + e_5 I_3 + S_2, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} km(Bi \cdot s - Ci \cdot c)/f \, d\alpha = e_6 I_1 + e_7 I_3 + S_3 \quad (3 \cdot a \sim d)$$

S_i : 初等関数の積分によって求まる定数, e_i : 変換の際現われる定数

ここで、変形前の軸線直角方向力 C_i が零($C_i=0$)のときは、式(3・C,d)は $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} kv \cdot s/f \, d\alpha = S_4, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} km Bi \cdot s/f \, d\alpha = S_5$ のように簡単になる。

ところで、変形前の軸線方向力(B_i)だけを考えた軸線不伸張の場合、異なった変数変換 $\sin \alpha/2 = \sin \alpha/2 \sin \varphi$ により積分は以下のような標準形で表わされることはよく知られている。

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} 1/f \, d\alpha = e_8 I_1, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (C-1)/f \, d\alpha = e_9 I_1 + e_{10} I_2, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} s/f \, d\alpha = S_6, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} Bi \cdot s/f \, d\alpha = S_7 \quad (4 \cdot a \sim d)$$

一方、同じ条件のもとで、式(1)~(3)に示す変換を用いると式(3)は、

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} 1/f \, d\alpha = e_{11} I_1, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (C-1)/f \, d\alpha = e_{12} I_1 + e_{13} I_3 + S_8, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} s/f \, d\alpha = S_9, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} Bi \cdot s/f \, d\alpha = S_{10} \quad (5 \cdot a \sim d)$$

となる。式(4・b)と式(5・b)との表示が異なっているが特別な場合変換の違いにより、第3種楕円積分は異なった標準形で表わされることがわかる。これに関連して、数値計算を行う際、第3種楕円積分は第1種および第2種楕円積分に比べて比率的に複雑になるので、可能な場合は他の標準形へ適当な変換を行うことが望ましい。

微小ひずみおよび、軸線不伸張の一般の場合はこの変換が可能となり、 $\sin \alpha = \sin(\varphi + \beta)$ (ここで、 $\sin \beta = C/\sqrt{B_i^2 + C_i^2}$, $\cos \beta = B_i/\sqrt{B_i^2 + C_i^2}$) なる変数変換により、次のような第3種楕円積分を含まない形で表わされる。 $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} 1/f \, d\alpha = e_{14} I_1, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (kwC-1)/f \, d\alpha = e_{15} I_1 + e_{16} I_2 + S_{11}, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} kv \cdot s/f \, d\alpha = e_{17} I_1 + e_{18} I_2 + S_{12}, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} km(Bi \cdot s - Ci \cdot c)/f \, d\alpha = e_{19} I_1 + e_{20} I_2 + S_{13} \quad (6 \cdot a \sim d)$

4. 数値計算: 数値積分で一般によく用いられる Simpson の公式を用いた場合と、楕円積分を用いた場合の精度の比較を Fig-2 に示す。縦軸には、それぞれの方法によって求めた鉛直変位の比を用いて表わしている。Fig-3, Fig-4 には、楕円積分を用いて計算した各種支配方程式による荷重変位曲線を示している。ここでは、細長比 100 および、各種支配方程式の差が出る細長比 4.0 の場合について計算を行っている。

<参考文献>

- 1) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M.: Theory of Elastic stability, 2nd. Ed. McGraw hill 1961
- 2) 西野, 倉方, 後藤: 一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論. 土木学会論文報告集 第237号
- 3) 安藤四郎: 楕円積分, 楕円関数入門 日新出版

Table-3 The Three Normal Forms of the Elliptic Integrals

The normal elliptic integral of the first kind
$I_1 = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$
The normal elliptic integral of the second kind
$I_2 = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}} du$
The normal elliptic integral of the third kind
$I_3 = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{(1-ku^2)(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$

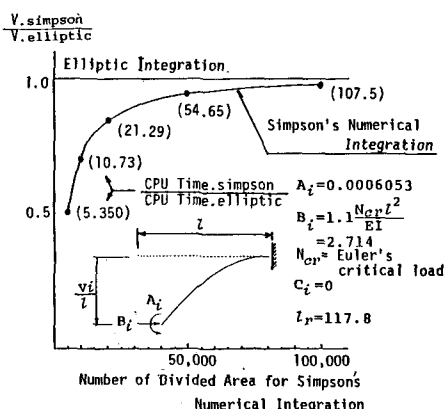


Fig-2 Accuracy of Numerical Integration of Finite Strains with Finite Displacements

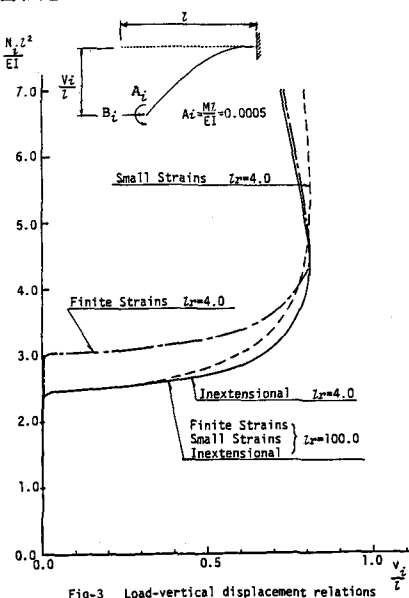


Fig-3 Load-vertical displacement relations

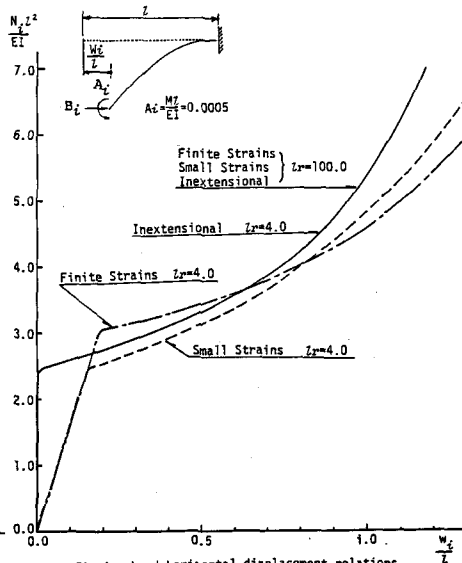


Fig-4 Load-horizontal displacement relations