

首都高速道路公団 正員 土 橋 浩
 東京大学 工学部 正員 長谷川 彰夫
 山梨大学 工学部 正員 深 沢 泰晴

1. まえがき 鋼構造物の終局状態を正確に把握するためには、材料非線形性と幾何学的非線形性の両者に対して、有効な解析手法の適用が要求される。このような観点から考えると、極限解析モデルとして川井¹⁾によって提案された剛体-ばね系モデルを用いた離散化解析法が、有力な手法の一つとして考えられる。これまで、このモデルを用いて、微小変位理論に基づいた薄肉開断面ばりの極限解析について報告した。²⁾そこで本報告では、さらに幾何学的非線形性をも考慮し、このモデルによる有限変位解析に妥当であると思われる変位場を仮定し、増分理論による定式化を行なった。また、単純なケースについて、薄肉開断面ばりの弾性および非弾性有限変位解析を試みた。

2. 剛体-ばね系モデル Fig. 1, Fig. 2に示すように、解析対象の薄肉開断面ばりを、 m 個の剛体はり要素とそれらを各節点で結合するばね系とから成る離散化モデルに置き換える。ばね系は、2つの剛体はり要素が接触する節点上に断面の法線方向と接線方向に2種類のばねを分布させる。各ばねのばね定数は、原系とモデルの変形に伴うひずみエネルギーの等価性から近似的に定められる。例えば、節点(i)において剛体はり要素を結合する2種類のばね定数は、弾性域内の変形に関しては、以下のように簡単に決定される。

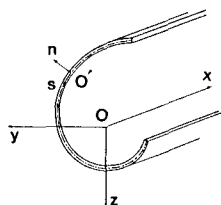


Fig. 1 断面形と座標

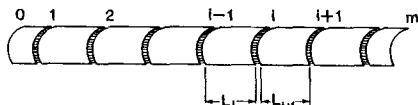


Fig. 2 剛体-ばね系モデル

$$K_{x,i} = \frac{2E}{l_i + l_{i+1}} \quad K_{s,i} = \frac{2G}{l_i + l_{i+1}} \quad (1 a, b)$$

ここに、 $K_{x,i}$ 、 $K_{s,i}$ はそれぞれ断面の法線方向、接線方向の分布ばね、 E は弾性係数、 G はせん断弾性係数を表す。また、 l_i は剛体はり要素(i)の長さである。

3. 変位場 はり-柱の有限変位問題について剛体-ばね系モデルを用いて定式化するために以下のような変位場を仮定する。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= a_4 - a_3 (y - y_0) + a_2 (z - z_0) - \omega a_7 \\ &\quad - \{(a_2)^2 + (a_3)^2\} (x - x_0) / 2 \\ &\quad + a_1 a_2 (y - y_0) / 2 + a_1 a_3 (z - z_0) / 2 \\ v(x, y, z) &= a_5 - a_1 (z - z_0) + a_3 (x - x_0) \\ &\quad - (a_1)^2 (y - y_0) / 2 + a_2 a_1 (x - x_0) / 2 \\ w(x, y, z) &= a_6 - a_2 (x - x_0) + a_1 (y - y_0) \\ &\quad - (a_1)^2 (z - z_0) / 2 + a_3 a_1 (x - x_0) / 2 \end{aligned} \quad (2 a-c)$$

ここに、 a_1 、 a_2 、 a_3 は、各軸回りの回転変位成分、 a_4 、 a_5 、 a_6 は、各軸方向の変位成分、 ω は、反り関数、 a_7 は、ねじり率である。3次元問題における厳密な剛体変位関数を回転変位に関しMaclaurin展開し、その2次の項まで考慮して、都井が誘導した3次元近似剛体変位関数³⁾と比較すると、上記の変位場は、薄肉断面部材としての運動場をより高次の精度で満足するように改善したものである。

4. 剛性方程式 式(2a-c)で仮定した変位場を用いて、剛体-ばね系モデルに対し、座屈現象をも取り扱い得る剛性方程式を得るために、増分理論による仮想仕事の定理を適用する。この場合の仮想仕事式は、

$$\sum_{i=1}^m \iint_{A_i} \delta(\delta^{(0)} + \Delta \delta)^t (\bar{f}^{(0)} + \Delta \bar{f}) dA - \sum_{i=1}^m \iint_{A_i} \delta(\mathbf{u}^{(0)} + \Delta \mathbf{u})^t (\bar{\mathbf{f}}^{(0)} + \Delta \bar{\mathbf{f}}) dA \frac{l_i + l_{i+1}}{2} = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{f}}$ は表面力、 $\mathbf{u}$ は剛体要素の変位、 $\mathbf{f}$ 、 δ はそれぞれ境界反力および境界相対変位である。また、肩付の(0)は前段階での釣り合い状態のそれぞれの量である。 Δ は増分を意味する。この式(3)に、先に仮定した変位場、式(2a-c)を代入すると以下のように剛性方程式が得られる。

$$\sum_{i=1}^m \{ \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \} \Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \Delta \mathbf{F} - \sum_{i=1}^m \mathbf{R} \quad (4)$$
 ここに、 $\mathbf{K}_e$ は線形剛性行列、 $\mathbf{K}_g$ は幾何剛性行列、 $\Delta \mathbf{F}$ は外力増分、 $\mathbf{R}$ は不釣り合い力である。ところで、この $\mathbf{K}_e$ は文献2) と同じであり、 $\mathbf{K}_g$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{22}^g &= (N^{(0)} + \frac{M_y^{(0)}}{I_{yy}} J_y + \frac{M_z^{(0)}}{I_{zz}} J_z + \frac{M_\omega^{(0)}}{I_{\omega\omega}} J_\omega) \mathbf{D}_1^t \mathbf{D}_1, & \mathbf{K}_{44}^g &= \frac{1_i + 1_{i+1}}{2} N^{(0)} \{ z_s^2 - 2(y_s J_y + z_s J_z) \} + M_y^{(0)} \{ \beta_y - 2y_s I_{yz} \\
 & & & + (y_s^2 + z_s^2) J_y \} + M_z^{(0)} \{ \beta_z - 2z_s I_{zy} + (y_s^2 + z_s^2) J_z \} \\
 \mathbf{K}_{33}^g &= (N^{(0)} + \frac{M_y^{(0)}}{I_{yy}} J_y + \frac{M_z^{(0)}}{I_{zz}} J_z + \frac{M_\omega^{(0)}}{I_{\omega\omega}} J_\omega) \mathbf{D}_1^t \mathbf{D}_1 \\
 & & & + M_\omega^{(0)} \{ \beta_\omega - 2(I_{\omega y} + I_{\omega z}) + (y_s^2 + z_s^2) J_\omega \} \mathbf{D}_1^t \mathbf{D}_1 \\
 \mathbf{K}_{42}^g &= (\frac{N^{(0)}}{A_i} J_z + \frac{M_y^{(0)}}{I_{yy}} I_{zy} + M_z^{(0)} + \frac{M_\omega^{(0)}}{I_{\omega\omega}} I_{z\omega}) (\frac{C^t \mathbf{D}_1}{2} - \frac{1_{i+1} + 1_{i+1}}{2} \mathbf{D}_1^t \mathbf{D}_1) \\
 & & & + z_s (N^{(0)} + \frac{M_y^{(0)}}{I_{yy}} J_y + \frac{M_z^{(0)}}{I_{zz}} J_z + \frac{M_\omega^{(0)}}{I_{\omega\omega}} J_\omega) \frac{1_{i+1} + 1_{i+1}}{2} \mathbf{D}_1^t \mathbf{D}_1 \\
 \mathbf{K}_{23}^g &= - (\frac{N^{(0)}}{A_i} J_y + M_y^{(0)} + \frac{M_z^{(0)}}{I_{zz}} I_{zy} + \frac{M_\omega^{(0)}}{I_{\omega\omega}} I_{y\omega}) (\frac{C^t \mathbf{D}_1}{2} - \frac{1_{i+1} + 1_{i+1}}{2} \mathbf{D}_1^t \mathbf{D}_1) \\
 & & & - y_s (N^{(0)} + \frac{M_y^{(0)}}{I_{yy}} J_y + \frac{M_z^{(0)}}{I_{zz}} J_z + \frac{M_\omega^{(0)}}{I_{\omega\omega}} J_\omega) \frac{1_{i+1} + 1_{i+1}}{2} \mathbf{D}_1^t \mathbf{D}_1
 \end{aligned} \quad (5 \text{ a-e})$$

ここに $J_y = \iint_{A_i} y dA$, $J_z = \iint_{A_i} z dA$, $J_\omega = \iint_{A_i} \omega dA$, $I_{xx} = \iint_{A_i} x^2 dA$, $I_{yy} = \iint_{A_i} y^2 dA$,
 $I_{zz} = \iint_{A_i} z^2 dA$, $I_{\omega\omega} = \iint_{A_i} \omega^2 dA$, $I_{yz} = \iint_{A_i} yz dA$, $I_{\omega y} = \iint_{A_i} \omega y dA$, $I_{\omega z} = \iint_{A_i} \omega z dA$,
 $\beta_y = -2y_s + \frac{1}{I_{yy}} \iint_{A_i} (y^2 + z^2) y dA$, $\beta_z = -2z_s + \frac{1}{I_{zz}} \iint_{A_i} (y^2 + z^2) z dA$, $\beta_\omega = \frac{1}{I_{\omega\omega}} \iint_{A_i} (y^2 + z^2) \omega dA$,
 $z_s^2 = (I_{yy} + I_{zz}) + A(y_s^2 + z_s^2)/A$, $C = [-1/2 \ 0 \ 1/2]$, $\mathbf{D}_1 = [-1/1_i \ (1/1_{i+1} - 1/1_i) \ 1/1_{i+1}]$

また、各断面力は、軸力 N 、曲げモーメント M_y 、 M_z 、そして反りモーメント M_ω である。

5. 数値解析例

(1) 固有値解析による座屈荷重：柱の曲げ座屈、はりの横倒れ座屈について、要素数を変化させて固有値解析をし、理論解と比較した結果を Fig. 3 に示す。要素数が10以上になるとその誤差が2%以内となる。従って以下の数値解析には、10要素モデルを用いる。

(2) 弾性有限変位解析：Fig. 4 に Timoshenko による楕円積分の解、有限要素法 (FEM)、剛体-ばね系モデル法 (RBSM) による数値解を示した。非線形解析には、FEM, RBSM 共に Newton-Raphson 法による繰り返し計算を用いた。Fig. 4 から、このモデルの有限変位解析への適用が、十分妥当であることが分かる。

(3) 非弾性有限変位解析：材料を完全弾塑性体、降伏条件にはせん断応力は関与しない、また残留応力は考慮しないとして、柱の耐荷力解析を行なった。解析は、荷重増分法と弧長法を用い、各増分荷重段階の解の収束は、(2) と同様に Newton-Raphson 法によった。荷重-変位曲線を Fig. 5 に示したが、耐荷力は、FEM との差が1.7%, Perry-Robertson 式との差が2.7%であった。精度を同じにして、計算時間を、FEM と比較すると、非弾性解析において半分程度の時間短縮となった。

6. まとめ 剛体-ばね系モデルを用いて、有限変位問題に対する変位場を仮定し、定式化を行なった。数値解析を試みた結果、非弾性解析に計算の効率化が期待できることが分かった。

参考文献 1) 川井：New element models ... 日本造船学会論文集, Vol. 141, 1977. 2) 深沢、土橋：薄肉開断面はりの剛体-ばね系モデルの定式化、構造工学論文集, Vol. 31A, 1985. 3) 都井、川井：Discrete limit analysis ... 生産研究, Vol. 34, No. 8, 1982.

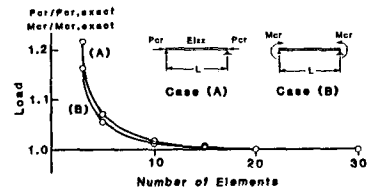


Fig. 3 要素数と解の精度の関係

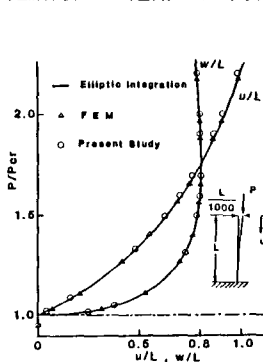


Fig. 4 荷重-変位曲線

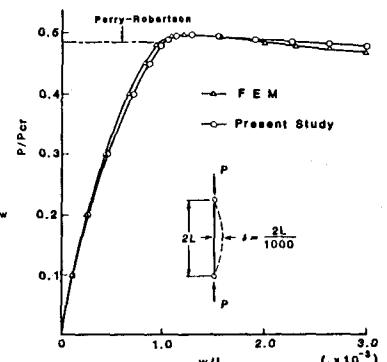


Fig. 5 荷重-変位曲線