

都立区 正員 山本英男 武蔵工大 正員 西脇威夫  
武蔵工大 正員 増田陳紀 武蔵工大 正員 皆川 勝

1. はじめに 本研究は、三次元空間における動的不安定性を取り扱うことを念頭に、吉田・増田らによって提案された静的非線形解析法を基礎として、幾何的非線形性を考慮した骨組構造の動的応答解析法を提案し、第一段階として、アーチの面内動的座屈問題への適用例によりその妥当性を検討したものである。

2. 幾何的非線形性を考慮した運動方程式 吉田・増田ら<sup>1)</sup>が提案した支配方程式にダランベールの原理により慣性力を導入すると、本解析の基礎となる増分形で示した運動方程式が次式のように得られる。

$$\Delta \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{m}^* \mathbf{T}_{(t+\Delta t)} \Delta \ddot{\mathbf{U}} + \Delta \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{(t)} + \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^T \cdot \mathbf{K}^* \{ \Delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{U}_{(t)} + \mathbf{C}_{(t)}) + \mathbf{T}_{(t+\Delta t)} \cdot \Delta \mathbf{C} \} \dots \dots \dots (1)$$

$$+ \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^T \cdot \mathbf{K}^* \mathbf{T}_{(t+\Delta t)} \Delta \mathbf{U} + \{ \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^T \cdot \mathbf{m}^* \mathbf{T}_{(t+\Delta t)} - \mathbf{T}_{(t)}^T \cdot \mathbf{m}^* \mathbf{T}_{(t)} \} \ddot{\mathbf{U}}_0$$

$\mathbf{T}$ : 全体座標系から部材座標系への座標変換行列

$\mathbf{f}$ : 部材節点力ベクトル  $\mathbf{K}^*$ : 部材線形剛性行列

$\mathbf{m}^*$ : 部材質量行列  $\mathbf{C}$ : 部材剛体回転ベクトル

$(t)$ : 時刻  $t$  の状態を示す  $\Delta$ : 増分を示す

3. 運動方程式の解法 本解法では静的問題において少ない反復回数で収束値を得ることが確認されている二段階近似反復修正法を基礎として、時間積分にNewmarkの $\beta$ 法を用いる。

4. アーチの動的座屈解析 a) 解析対象 図1に示すPlautら<sup>2)</sup>が扱ったアーチの中央に、図2に示すステップ荷重が作用する場合の強制振動解析を行う。アーチの初期状態(無載荷状態)における形状は、式(2)で表わされるものとし、両端はピン支持とする。

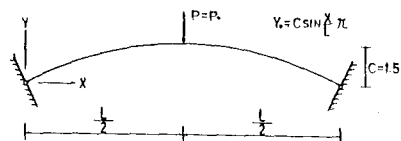
$$Y_0 = C \sin(X\pi/L) \dots \dots \dots (2)$$

b) 解析条件 図1に示すアーチを直線4要素、8要素、16要素、32要素でモデル化する。なお、積分時間間隔は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$  SECとする。

c) 解析結果および考察 4要素モデルに対する10種類の荷重による無次元平均変位 $\Delta$ の時間応答履歴を図3に示す。ここで、無次元平均変位 $\Delta$ を式(3)のように定義する。

$$\Delta = \sum Y / \sum Y_0 \dots \dots \dots (3)$$

図4に荷重 $P_0=150.0$ kgの時のChanの方法による線形応答解析結果と本解析手法による非線形応答解析結果の相違を示す。最初両者は一致しているが、その後、非線形応答は変位が増大し、周期が伸びていることが分かる。図5は、8要素モデルによる時間推移に伴う変形形状を示す。次に、荷重の変化に対する無次元平均変位 $\Delta$ の最大応答の変化を図6に示す。Budiansky - Roth<sup>3)</sup>は、浅いシェルの動的安定性を扱った論文の中で、動的不安定を荷重の小さな増加に対して、その最大応答に急激な増



○  
断面形状

$L = 100 \text{ cm}$   
 $d = 2 \text{ cm}$   
 $E = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$   
 $P = 7.85 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$

図1 解析対象

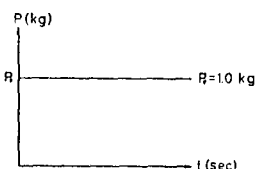


図2 荷重条件

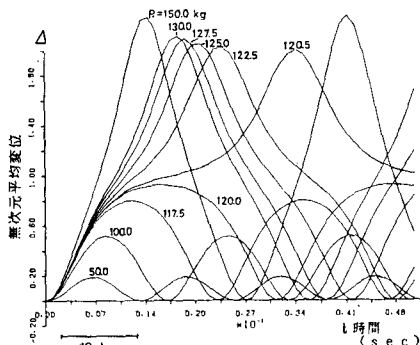


図3 時間応答履歴

加が生じる時であると定義している。また、Galerkin法を用いたPlautらの論文によると、このBudiansky - Rothの動的不安定の定義を用いて決定した動的座屈荷重（臨界荷重値）は、図1のアーチでは $P_0=126.8\text{kg}$ になり、また、静的座屈値は $P_s=163.7\text{kg}$ になるとしている。図6によれば4要素では $P_0=120.0\text{kg} \sim 120.5\text{kg}$ の間で、8要素では $P_0=125.0\text{kg} \sim 125.5\text{kg}$ の間でBudiansky - Rothが定義したような最大応答の急激な増加を観察することができる。また、このようにして求めた動的座屈値は、Plautらの文献に示された動的座屈荷重値 $P_0=126.8\text{kg}$ にかなり近い値である。荷重の変化に対する周期の変化という観点から見ると図7のようになる。動的座屈値までは荷重の増加に伴って周期が長くなり、動的座屈値近傍で急激に長くなる。そして動的座屈値を過ぎると、再び短くなっている。動的座屈値におよぼす要素数の影響を表1ならびに図8に示す。要素数32でPlautが示した動的座屈値（ $P_0=126.8\text{kg}$ ）との差が0.2%以内となり、要素数8でも相違が1.0～1.4%であり、良い近似を示していることが分かる。従って、本解析法を用いる時、少ない要素数でモデル化してもアーチの動的座屈を追跡することが可能であることが分かる。

5. おわりに 以上より、静的非線形解析に対してその有効性が示されている吉田らの方法が、動的問題に対しても有効であることが示された。しかし、ここでは面内でしかも対称振動波形の問題のみを扱っており、非対称振動波形および三次元空間内での振動問題に対する妥当性については今後更に検討する必要がある。

（参考文献）1)吉田，増田，森本，広沢；立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法，土木学会論文報告集，第300号，PP.21-31，1980。  
2)Gregory, W.E. Jr. and Plaut, R.H.; Dynamic stability boundaries for shallow arches, ASCE, EM6. pp.1036-1050, 1982.  
3)Budiansky, B. and Roth, R.S.; Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells, NASA TND-1510, pp.597-606, 1962.

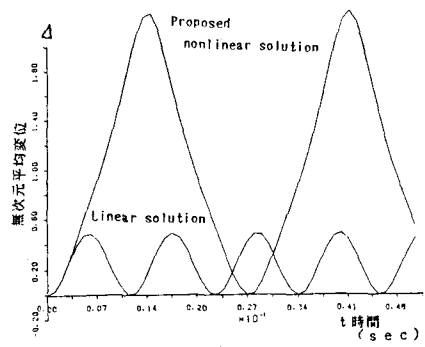


図4 線形解との比較（ $P = 150\text{kg}$ ）

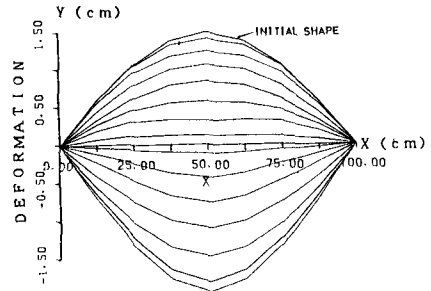


図5 時間の推移による変形状況

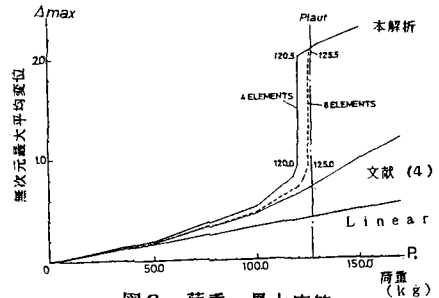


図6 荷重—最大応答

表1 要素数に対する動的座屈値とPlautの示す値との相異

| 要素数 | 動的座屈値 (kg)    | Plautの示す値との相異 (%) |
|-----|---------------|-------------------|
| 4   | 120.0 ~ 120.5 | 5.4 ~ 5.0         |
| 8   | 125.0 ~ 125.5 | 1.4 ~ 1.0         |
| 16  | 126.0 ~ 126.5 | 0.6 ~ 0.2         |
| 32  | 126.5 ~ 127.0 | 0.2 ~ 0.0         |

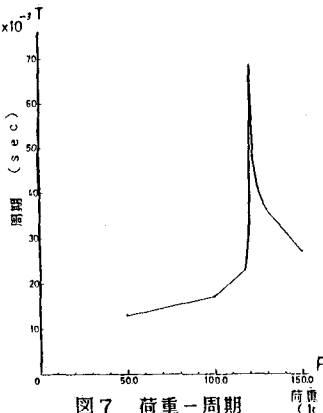


図7 荷重—周期

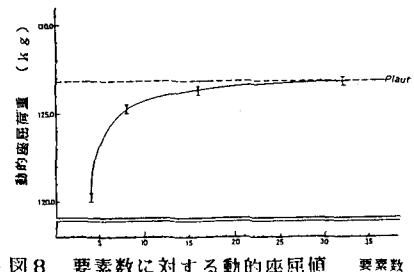


図8 要素数に対する動的座屈値