

○ 五洋建設株式会社

正員 三藤 正明

(株)国際テクノロジー・センター

正員 竹内 則雄

東京大学生産技術研究所

正員 川井 忠彦

1. はじめに

筆者の1人である竹内によって2次元剛体-ばねモデルの微小変形理論に基づく定式化および各種土構造物に適用した極限解析結果については、文献(1)に詳細に述べられている。この微小変形理論は極めて有用で、この方法により工学的に十分な精度の解が得られる重要な地盤工学上の問題は数多く存在するものと考えられる。しかしながら、より正確な手法が必要とされる地盤工学上の問題も少なくない。たとえば、土構造物が過大な荷重を受け局部破壊から全体破壊への進展過程を解析する問題もその1つであると考えられる。すなわち、破壊近傍の地盤の挙動は微小変形ではなく、むしろ有限変形を示すものと考えられるからである。さて、剛体-ばねモデルでは要素境界面上にばねを仮定するために、せん断破壊時に発生する不連続性の考慮が簡単にできる。また、せん断破壊後に生じる有限変形に関する定式化も要素内変位を剛体と仮定していることより、簡単に求めることができる。すなわち、材料非線形と幾何学的非線形とが組み合わさった高度に非線形な問題も容易に行なうことができる。本文では、2次元剛体-ばねモデルの幾何学非線形問題に対する定式化および簡単なモデルを用いて行なった精度の検討結果について述べる。

2. 幾何学的非線形性を考慮した剛体-ばねモデルの定式化

図-1に示すような剛体要素1を考える。いま、三角形要素の重心点における平行変位成分を(u_1 、 v_1 、 θ_1)とし、 $\sin \theta_1$ 、 $\cos \theta_1$ についてテーラー展開の2次の項まで考慮した水平方向変位 $U(x, y)$ 、垂直方向変位 $V(x, y)$ は以下のように求まる。

$$U(x, y) = u_1 - (y - y_{G1}) \theta_1 - (x - x_{G1}) \theta_1^2 / 2 \quad (1)$$

$$V(x, y) = v_1 + (x - x_{G1}) \theta_1 - (y - y_{G1}) \theta_1^2 / 2 \quad (2)$$

ここで、 x_{G1} 、 y_{G1} は要素重心点の x 、 y 座標値である。(1)、(2)式より剛体変位の1次、2次の増分量は前回の回転変位 $\theta_1^{(0)}$ を用いると以下のように示される。

$$\Delta U^{(1)} = \Delta u_1 - (y - y_{G1}) \Delta \theta_1 - (x - x_{G1}) (\theta_1^{(0)} \Delta \theta_1) \quad \Delta U^{(2)} = -(x - x_{G1}) (\Delta \theta_1^2) / 2 \quad (3)$$

$$\Delta V^{(1)} = \Delta v_1 + (x - x_{G1}) \Delta \theta_1 - (y - y_{G1}) (\theta_1^{(0)} \Delta \theta_1) \quad \Delta V^{(2)} = -(y - y_{G1}) (\Delta \theta_1^2) / 2 \quad (4)$$

ここで、 $\Delta U^{(1)}$ 、 $\Delta U^{(2)}$ は水平方向の1次および2次増分を示す。同様に $\Delta V^{(1)}$ 、 $\Delta V^{(2)}$ も垂直方向の1次、2次増分を示す。さて、隣合う要素①、②を考える。いま、全体座標系に関する1次の相対増分変位 $\Delta \delta^{(1)}$ および2次の相対増分変位 $\Delta \delta^{(2)}$ は以下のように与えられる。

$$\Delta \delta^{(1)} = B \cdot \Delta U \quad (5)$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & (y - y_{G1}) + (x - x_{G1}) \theta_1^{(0)} & 1 & 0 & -(y - y_{G2}) - (x - x_{G2}) \theta_2^{(0)} \\ 0 & -1 & -(x - x_{G1}) + (y - y_{G1}) \theta_1^{(0)} & 0 & 1 & (x - x_{G2}) - (y - y_{G2}) \theta_2^{(0)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\Delta U^T = \Delta u_1, \Delta v_1, \Delta \theta_1, \Delta u_2, \Delta v_2, \Delta \theta_2 \quad (7)$$

$$\Delta \delta^{(2)} = \Delta U_2^{(2)} - \Delta U_1^{(2)} \quad (8)$$

$$(\Delta \delta^{(2)})^T = \Delta \delta_x^{(2)}, \Delta \delta_y^{(2)} \quad (9)$$

$$\delta_x^{(2)} = U_2^{(2)} - U_1^{(2)} \quad (10)$$

$$\delta_y^{(2)} = V_2^{(2)} - V_1^{(2)} \quad (11)$$

ここで、 $\delta_x^{(2)}$ 、 $\delta_y^{(2)}$ は x 、 y 方向に関する2次の増分相対変位、また下付きの1、2は要素番号を示す。以上により有限変形を考慮した剛体変位関

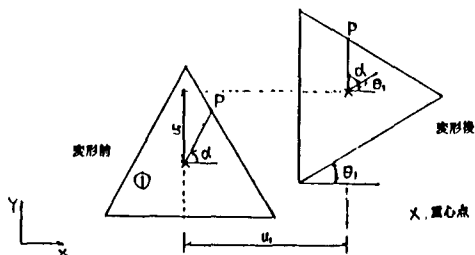


図-1 幾何学的非線形性を考慮した剛体-ばねモデル

数および相対変位関数が求まったので、つぎに増分形仮想仕事式を用いて剛性方程式を求める。さて、いまある段階のときの解が得られたものとし、その状態における境界相対変位、境界応力、剛体変位、物体力および表面力を、 $\delta^{(e)}$ 、 $\sigma^{(e)}$ 、 $U^{(e)}$ 、 $\bar{P}^{(e)}$ 、 $\bar{F}^{(e)}$ とする。そして、次の段階における物体力、表面力がそれぞれ $\bar{P}^{(e)} + \Delta \bar{P}$ 、 $\bar{F}^{(e)} + \Delta \bar{F}$ に増加し、境界相対変位、境界応力および剛体変位が $\delta^{(e)} + \Delta \delta$ 、 $\sigma^{(e)} + \Delta \sigma$ 、 $U^{(e)} + \Delta U$ になったとする。いま、仮想増分境界相対変位を $\delta \Delta \delta$ 、仮想増分変位を $\delta \Delta U$ とすれば、増分形仮想仕事式は次式のごとく与えられる。

$$\sum_{S_b} \int_{S_b} \delta(\delta^{(e)} + \Delta \delta)^T \cdot (\sigma^{(e)} + \Delta \sigma) dS - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \delta(U^{(e)} + \Delta U)^T \cdot (\bar{P}^{(e)} + \Delta \bar{P}) dA - \sum_{S_b} \int_{S_b} \delta(U^{(e)} + \Delta U)^T \cdot (\bar{F}^{(e)} + \Delta \bar{F}) dS = 0 \quad (12)$$

ここで、総和記号の下での S_b は各要素境界辺についての領域であり、 $\sum_{\Gamma}$ および $\sum_{S_b}$ はそれぞれ各要素内、要素境界面上について総和をとることを意味する。いま、(12)式を1次、2次成分で表わすと、

$$\sum_{S_b} \int_{S_b} \delta(\delta^{(e)} + \Delta \delta + \Delta \delta^{(2)})^T \cdot (\sigma^{(e)} + \Delta \sigma) dS - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \delta(U^{(e)} + \Delta U^{(2)} + \Delta U^{(2)})^T \cdot (\bar{P}^{(e)} + \Delta \bar{P}) dA - \sum_{S_b} \int_{S_b} \delta(U^{(e)} + \Delta U^{(2)} + \Delta U^{(2)})^T \cdot (\bar{F}^{(e)} + \Delta \bar{F}) dS = 0 \quad (13)$$

となる。上式の3次の微小項を省略し、整理すると、

$$\sum_{S_b} \int_{S_b} \delta(\Delta \delta^{(2)})^T \cdot \Delta \sigma dS + \sum_{S_b} \int_{S_b} \delta(\Delta \delta^{(2)})^T \cdot \sigma^{(e)} dS - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \delta(\Delta U^{(2)})^T \cdot (\bar{P}^{(e)} + \Delta \bar{P}) dA - \sum_{S_b} \int_{S_b} \delta(\Delta U^{(2)})^T \cdot (\bar{F}^{(e)} + \Delta \bar{F}) dS = \Delta \bar{P} + \Delta \bar{F} \quad (14)$$

となる。ここで、

$$\Delta \bar{P} = \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \delta(\Delta U^{(2)})^T \cdot \Delta \bar{P} dA + \sum_{S_b} \int_{S_b} \delta(\Delta U^{(2)})^T \cdot \Delta \bar{F} dS \quad (15)$$

$$\Delta \bar{F} = - \sum_{S_b} \int_{S_b} \delta(\Delta \delta^{(2)})^T \cdot \sigma^{(e)} dS + \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \delta(\Delta U^{(2)})^T \cdot \bar{P}^{(e)} dA + \sum_{S_b} \int_{S_b} \delta(\Delta U^{(2)})^T \cdot \bar{F}^{(e)} dS \quad (16)$$

である。(14)式の左辺の第1項より初期変位を考慮した剛性行列が求まり、また第2項より初期応力行列が求まる。そして、右辺の $\Delta \bar{P}$ が不平衡外力のなす仮想仕事量である。つぎに、(14)式の左辺第1項より初期変位を考慮した剛性行列を求めてみる。いま、要素境界面に作用する増分相対変位 $\Delta \delta^{(e)}$ と増分境界応力 $\Delta \sigma$ の関係を以下のように仮定する。

$$\Delta \sigma = D \cdot \Delta \delta^{(e)} \quad (17)$$

ここで、 D は合体座標系に関するスプリング行列で、いわば構成式を意味している。ここで(5)式、(17)式を(14)式の第1項に代入すれば、要素剛性行列 K は

$$K = \sum_{S_b} B^T \cdot D \cdot B dS \quad (18)$$

である。他の係数行列およびベクトルも同様に求めてよい。

3. 数値計算

本モデルの幾何学的非線形問題に対する解の精度の検討を行なうために、文献(2)でChenらが有限要素法を用いて解析したモデルと同じモデルを用いて解析を行なった。なお、文献(2)と材料定数が一致するようにポアソン比は0とした。図中、×印が本モデルを用いて求めた値である。全体的に低目の値を示していることがわかる。

4. まとめ

剛体-ばねモデルの幾何学的非線形問題

に対する定式化および簡単なモデルを用いて精度の検討を行なった。全体的に低目の値を示しているが、良好な精度で解が求まっていると考えられる。今後は、本モデルを幾何学的非線形性を考慮した静的および動的極限解析に用いる予定である。

- 1)川井：固体力学諸問題の離散化極限解析、生研セミナーテキスト76、(1982)
- 2)W.F.Chen：Nonlinear Analysis in Soil and Solid Mechanics、Numerical Methods in Geomechanics (1976)

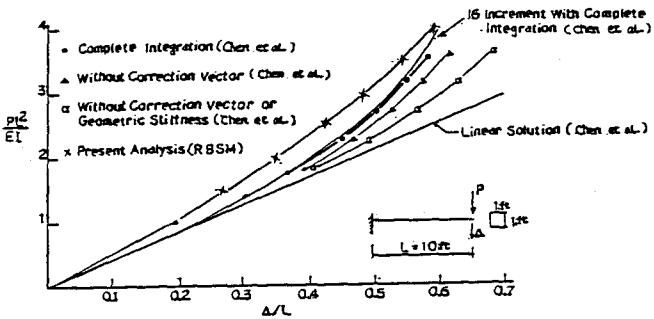


図-2 片持ち梁モデル