

秋田高専 正員 ○ 堀江 保

秋田大学 正員 薄木 征三

1. はじめに

本報告は、著者らの展開したせん断変形を考慮したはり理論を弾塑性状態まで拡張し、塑性化が始まる荷重、塑性域の広がり、軸応力分布等に及ぼすせん断変形の影響を検討したものである。対象としたのは、図-1に示す矩形断面をもつ単純支持桁で、荷重状態としては等分布荷重および集中荷重を用い、各理論式の誘導手順を説明し、数値計算例を示した。

2. 理論式

図-1において、 C は弾性核の高さを表し、それは、 Z の関数となる。領域(Ⅰ)、(Ⅱ)に対し軸応力は次式となる。

$$(I) \begin{cases} \sigma_z = -E x u'' + \frac{E}{G} (B x U)' & \text{弾性部分} \\ \sigma_z = \pm Y & \text{塑性部分} \end{cases} \quad (1) \text{ a, b}$$

$$(II) \quad \sigma_z = -E x u'' + \frac{E}{G} B x U' \quad (2)$$

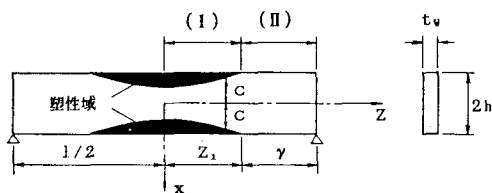


図-1 対象桁の諸寸法記号

$$B x = \int_{s_1}^s \frac{S x}{t} ds \quad S x = \int_{s_1}^s x t ds \quad (3) \text{ a, b}$$

(1) a 式、(2) 式において () ' は桁軸 Z に関する微分を表わし、第 2 項がせん断変形による項であり、 $B x$ は (3) 式に定義した x に関する座標を表わす。(2) 式は文献 1) で誘導した軸方向ひずみのうち、一軸曲げのみに関するものより得られ、それと同様の手順を弾塑性状態に適用することにより (1) a 式が求められる。また (1) b 式の Y は降伏応力を表わす。領域 (Ⅰ) において、はり内部のつり合い方程式と境界条件式は、仮想仕事の原理より次式のようになる。

$$\text{つり合い式} \quad M y'' + q = 0, \quad S y + T x - H y' = 0 \quad (4) \text{ a, b}$$

境界条件式 $\bar{Q} x = M y'$ または $u = C_1$ 、 $\bar{M} y = M y$ または $u' = C_2$ 、 $\bar{H} y = H y$ または $U = C_3$ (5) a-c
上式において断面力は次式のように定義し、上付バーは境界におけるそれらの値を示す。

$$M y = \int_F \sigma_z x dF, \quad H y = \int_F \sigma_z \frac{E}{G} B x dF, \quad S y = \int_F \sigma_z \frac{E}{G} B x' dF, \quad T x = \int_F \tau_{sz} \frac{E S x}{G t} dF \quad (6) \text{ a-d}$$

(6) 式の定義より断面力を変位成分で表わし、(4) 式、および弾性と塑性の境界での条件、すなわち、 $x = c$ において $\sigma_z = Y$ の条件を用いることにより、次式のような弾性核 C に関する微分方程式が得られる。

$$5 f_1 \bar{\alpha}^2 \{ (\bar{C}'' \bar{C} - 4 \bar{C}'^2) f_2 + f_3 \} + \bar{\alpha}^2 \{ \bar{C}^2 (\bar{C}'' \bar{C} - 2 \bar{C}'^2) - 5 (\bar{C}'' \bar{C} - 4 \bar{C}'^2) \} \\ 70 G / E (\bar{C}^2 - 3 + f_4) \quad (7)$$

(7) 式を表示する際、次のような無次元量を用いた。

$$\bar{C} = \frac{C}{h}, \quad \bar{C}' = \frac{C'}{h} \left(\frac{1}{2} \right), \quad \bar{C}'' = \frac{C''}{h} \left(\frac{1}{2} \right)^2, \quad \bar{\alpha} = \frac{2h}{1}, \quad \bar{Z} = \frac{2Z}{1} \quad (8) \text{ a-e}$$

また、(7) 式中の $f_1 \sim f_4$ は、荷重状態によって変化し、次のように与えられる。

$$\text{等分布荷重} \quad f_1 = 5K_1, \quad f_2 = 1 - \bar{Z}^2, \quad f_3 = 6\bar{C}^2 - 20\bar{C}\bar{C}', \quad f_4 = 3K_1(1 - \bar{Z}^2)$$

$$\text{集中荷重} \quad f_1 = 5K_2, \quad f_2 = 1 - \bar{Z}, \quad f_3 = -10\bar{C}\bar{C}', \quad f_4 = 3K_2(1 - \bar{Z}) \quad (9) \text{ a-h}$$

(9) 式に含まれる K_1 、 K_2 は荷重強度に関する無次元量で (10) 式のように定義すると、桁中央断面で塑性化が始まる時から全断面が降伏するまで (11) 式に示す範囲で変化する。

$$K_1 = \frac{q}{2twY\bar{\alpha}^2}, K_2 = \frac{P}{2twhY\bar{\alpha}} \quad (10) \text{ a,b} \quad \frac{2}{3q_s} \leq K_1 \leq 1, \frac{2}{3P_s} \leq K_2 \leq 1 \quad (11) \text{ a,b}$$

(11)式の q_s 、 P_s は塑性化が始まる荷重に対するせん断変形の影響を表わし次式のような。

$$q_s = 1 + \frac{28}{81}\bar{\alpha}^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\cosh(kl/2)} \right\}, P_s = 1 + \frac{14}{9}\bar{\alpha} \tanh\left(\frac{kl}{2}\right), \frac{kl}{2} = \frac{1}{\bar{\alpha}} \sqrt{210 \frac{G}{E}} \quad (12) \text{ a-c}$$

q_s および P_s を1とした時、はり理論の値となるが(12)式より、それらは $\bar{\alpha}$ の関数となっており、 $\bar{\alpha}$ の値に対しせん断変形の影響は表-1のようになる。その際、 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $G=8.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ として計算した。表より $\bar{\alpha}$ が大きい時塑性化が始まる荷重がかなり小さくなるのがわかる。

(7)式を満たす $\bar{C}$ を求めるために、ここでは、次のような2次のベキ級数で近似した。

$$\text{等分布荷重} \quad \bar{C} = a_0 + a_1 \bar{Z}^2$$

$$\text{集中荷重} \quad \bar{C} = a_0 + a_1 \bar{Z} + a_2 \bar{Z}^2 \quad (13) \text{ a,b}$$

解析の際、(13)式の $a_0 \sim a_2$ の係数および塑性域の広がり $\bar{Z}_1 = 2Z_1/l$ が未知量となり、条件式としては(7)式、 $Z=Z_1$ において $\bar{C}=1$ 、および $Z=Z_1$ におけるせん断ひずみの連続条件 $U_{(1)}=U_{(n)}$ を用いた。3番目の条件式を適用する際、領域IIにおける応力と変位の条件として、 $Z=Z_1$ 、 $x=h$ において $(\sigma_z)_{(n)}=Y$ 、および $Z=1/2$ において $u''=0$ の条件を用いた。

3. 数値計算例

数値計算は、(11)式の範囲内で K_1 あるいは K_2 の値を決め、 a_0 、 Z_1 の初期値を与え、前述の条件式を満たすようニュートン・ラフソン法を用いて繰り返し計算を行なった。未知量 $a_0 \sim a_2$ 、 Z_1 が求められると(13)式によって弾性核の変化が求められ、また、(1)式、(2)式によって応力分布が求められる。1例として、 $\bar{\alpha}=0.5$ の寸法比を持つ桁の K_1 および K_2 を0.8とした時の塑性域の広がり $\bar{Z}$ に対する軸方向応力の変化を図-2、図-3に示した。塑性域の広がりに関し、分布荷重の場合は、深さ方向および部材軸方向について、また集中荷重の場合は深さ方向にせん断変形の影響が認められる。応力分布に関しては、はり理論による値を破線で示したが、特に、集中荷重の場合の荷重作用点近傍において顕著な違いが現れた。

本報告においては、(13)式に示すように2次のベキ級数で近似したが、さらに高次のベキ級数による近似を検討中である。また、ここでは、文献1)のせん断変形理論を弾塑性解析に拡張するための基礎的研究として、最も単純な矩形断面を対象としたが、より実用的なI形断面あるいは箱形断面を対象とした解析も今後の課題としたい。

参考文献 1) 稼農、薄木、堀江：せん断変形を考慮した薄肉断面直線ばりの理論，土木学会論文集，No282

表-1 塑性化が始まる荷重に対する影響

α	0.1	0.3	0.5	1.0
K_1	0.6644	0.6466	0.6136	0.4954
K_2	0.5769	0.4545	0.3750	0.2609

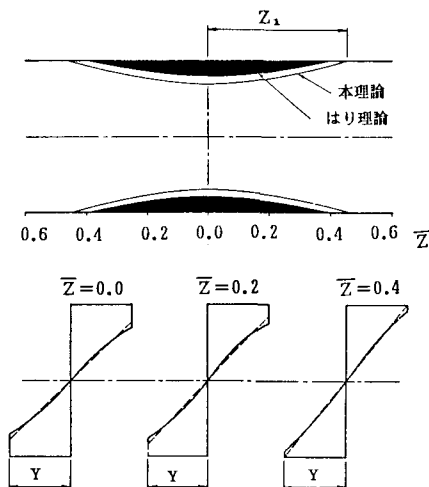


図-2 塑性域の広がり $\bar{Z}$ と応力分布(分布荷重)

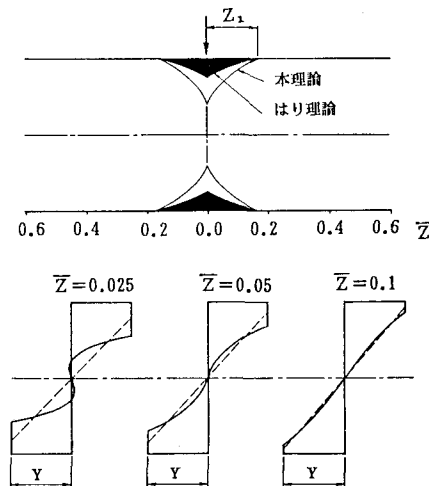


図-3 塑性域の広がり $\bar{Z}$ と応力分布(集中荷重)