

長崎大学○正員 松田 浩
長崎大学 正員 崎山 毅

1. まえがき

筆者ら¹⁾²⁾は、先に、任意の境界条件、荷重条件および変断面性に対する解析の容易さおよび方法の一般性に注目して、非線形弾性地盤上の変厚板の一解析法を提示した。本解析法は、基礎微分方程式の解析的近似解に基づく直接的かつ半解析的な解析法である。本文は、比較的研究報告が少ないと考えられる地盤反力係数が場所的に不均一な弾性地盤上の矩形板の曲げ問題に本解析法を適用し、断面力および変形について解析を行ない、その挙動を明らかにしたものである。

2. 弾性地盤上の矩形板の基礎微分方程式とその解析的近似解

矩形板のせん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x 、たわみを w とすれば、地盤反力係数の不均一性を考慮した一般的な弾性地盤上の変厚板の曲げに関する基礎微分方程式は、次の(1)式のような連立偏微分方程式となる。(1)式はReisnerの平板曲げ理論に基づいており、せん断変形の影響を考慮したものである。また、地盤はWinklerの仮定に基づいている。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - k_w w &= 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y, \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{M_y}{D} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} &= \frac{M_x}{D}, \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{2}{D(1-\nu)} M_{xy}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = \frac{Q_x}{G t_s}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = \frac{Q_y}{G t_s} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 $q = q(x, y)$: 荷重強度、 E : 弾性係数、 G : せん断弾性係数、 ν : ポアソン比、 $k = k(x, y)$: 板厚
 $D = E t^3 / 12(1-\nu^2)$: 板剛度、 $t_s = k / 1.2$ (1.2はせん断修正係数)、 $k_w = k_w(x, y)$: 地盤反力係数

式(1)を無次元化すると次式(2)のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_2}{\partial \eta} &= -\bar{q} + \bar{k} X_8, \quad \frac{\partial X_3}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_5}{\partial \eta} = \mu X_2, \quad \mu \frac{\partial X_3}{\partial \eta} + \frac{\partial X_4}{\partial \xi} = \mu X_1, \quad \frac{\partial X_6}{\partial \xi} + \nu \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} = I X_4 \\ \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial X_6}{\partial \xi} &= I X_5, \quad \frac{\partial X_7}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \eta} = J X_3, \quad \frac{\partial X_8}{\partial \xi} + X_7 = K X_2, \quad \frac{\partial X_8}{\partial \eta} + \mu X_4 = \mu K X_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 $(X_1, X_2) = (Q_x, Q_y) a^2 / D_0 (1-\nu^2)$ 、 $(X_3, X_4, X_5) = (M_{xy}, M_y, M_x) a / D_0 (1-\nu^2)$ 、 $(X_6, X_7) = (\theta_y, \theta_x)$ 、 $X_8 = w / a$ 、 $\xi = a \eta$ 、 $\eta = b \xi$ 、 a, b : 矩形板の縦横の辺長、 $\mu = b / a$ 、 $\bar{q} = \mu L_1 q / q_0$ 、 $L_1 = q_0 a^3 / D_0 (1-\nu^2)$ 、 $\bar{k} = \mu L_2 k / k_0$ 、 $L_2 = k_0 a^4 / D_0 (1-\nu^2)$ 、 q_0 : 基準荷重強度、 k_0 : 基準地盤反力係数、 $I = \mu(1-\nu^2)(k_0 / R)^3$ 、 $J = 2\mu(1+\nu)(k_0 / R)^3$ 、 R_0 : 基準板厚、 $K = E R^3 / 10 G a^2 R$ 、 $D_0 = E R_0^3 / 12(1-\nu^2)$: 基準板剛度

まず、連立偏微分方程式(2)の各式を領域 $[i, j]$ において面積分し、積分方程式に変換する。次に、等間隔の数値積分の応用により、領域 $[i, j]$ の主要点 (i, j) および従属点 (t, g) の諸量を用いて、これらの積分方程式を離散表示すれば、無次元化された断面力および変形 X_p ($p=1 \sim 8$)の主要点 (i, j) における値 X_{pij} に関する連立方程式が得られる。この連立方程式から、領域 $[i, j]$ における主要点 X_{pij} と境界従属点および内部従属点 (t, g) の諸量 X_{ptg} との間の関係式が求められ次式となる。

$$\begin{aligned} X_{pij} &= \sum_{t=1}^i \sum_{g=0}^{j-1} \beta_{ij} A_{pi} [X_{tj0} - X_{tjg} (1 - \delta_{tj})] + \sum_{g=0}^{j-1} \beta_{ij} B_{pi} [X_{t0g} - X_{tjg} (1 - \delta_{tj})] \\ &+ \sum_{t=0}^{i-1} \sum_{g=0}^{j-1} \beta_{it} \beta_{jg} C_{pi} X_{tjg} (1 - \delta_{tj} \delta_{jg}) - \sum_{t=0}^{i-1} \sum_{g=0}^{j-1} \beta_{it} \beta_{jg} A_{pi} \bar{q}_{tjg} \quad (3) \end{aligned}$$

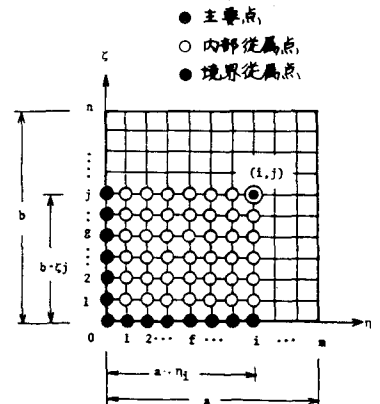


図 1

ここに、 $p=1\sim 8$ 、 β_{ij} ：等分割数値積分の重み係数（台形則）、 δ_{ij} ：クロネッカーのデルタ、
 また、(3)式より、任意領域 $[i,j]$ の主要点 (i,j) の諸量 X_{pij} は、この領域の境界従属点における諸量 X_{rfo} 、 X_{sog}
 のみによって、式(4)のように表わすことができる。(4)式が解析的近似解である。

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left(\sum_{f=0}^i \alpha_{pijfd} X_{rfo} + \sum_{g=0}^j \beta_{pijgd} X_{sog} \right) + \delta_{pij} \quad (4)$$

ここに、 X_{rfo} 、 X_{sog} はいわゆる積分定数で、対辺の境界条件によって決定されるべきものである。また、(4)式
 式中、 α_{pijfd} 、 β_{pijgd} は、伝達マトリックス法における伝達マトリックスに相当するものである。本解法による
 と仕様の境界条件の矩形板を解析することができるが、本文では、境界条件が $x=0, a$ で単純支持、 $y=\pm b/2$ で自由、
 および4辺自由なる矩形板を取扱う。 $M_y = \theta_x = w = 0$ (単純支持)、 $\theta_y = M_{xy} = M_y = 0$ (自由)

3. 数値解析結果

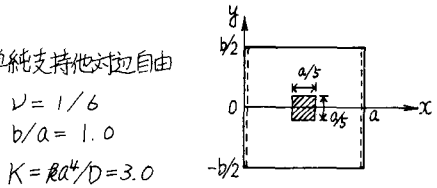
本解析法による弾性地盤上の矩形板の数値解の収束性および精度を明らかにするために、部分分布荷重を受け
 る対辺単純支持他対辺自由板($x=0, a$ 単純支持、 $y=\pm b/2$ 自由)について、断面力および変形の解析を行なった。その
 結果を文献(3)の結果とともに表1に示す。文献(3)もせん断変形の影響を考慮した数値解である。同表より、
 本解法に基づく断面力および変形の数値解は分割数 m の増加とともに一様に収束することが示され、比較的粗い
 分割のもとでも十分実用性のある解が得られてゐる。なお、表中 R_{10-20} とはRichardsonの補外公式による推定
 収束値である。次に、地盤反力係数が場所的に不均一な場合を想定して、図2の上部に示しているような地盤を
 取扱った。なお、地盤上の平板は、中央に集中荷重を受ける4辺自由板として、断面力および変形の解析を行な
 った。解析結果を図2に示す。

[参考文献]

- 1) 松田 崎山：非線形地盤上の変形矩形板の解析法，長崎大学報告，第21号
- 2) 崎山 松田：変形矩形板の曲げの解析法，土木学会論文報告集，第338号
- 3) Kobayashi, Senoda: Rectangular Thick Plates On Linear-Viscoelastic Foundation, PROC. JSCE No. 341
- 4) 梶原 一郎：平板の曲げ理論，培風館

表 1

対辺単純支持他対辺自由



R/a	m	x=a/2, y=0			x=a/2, y=±b/2		
		w	M _x	M _y	w	M _x	M _y
0.01	10	0.5036	0.7072	0.4482	0.3445	0.3481	
	20	0.5263	0.7977	0.5332	0.3473	0.3493	
	R ₁₀₋₂₀	0.5339	0.8279	0.5615	0.3482	0.3497	
	小林 園田	0.5345	0.8244	0.5603	0.3487	0.3488	
0.05	10	0.5083	0.7081	0.4470	0.3432	0.3514	
	20	0.5319	0.7966	0.5344	0.3456	0.3540	
	R ₁₀₋₂₀	0.5398	0.8261	0.5635	0.3464	0.3549	
	小林 園田	0.5407	0.8236	0.5615	0.3464	0.3552	
0.10	10	0.5224	0.7053	0.4469	0.3415	0.3549	
	20	0.5487	0.7959	0.5357	0.3436	0.3595	
	R ₁₀₋₂₀	0.5575	0.8261	0.5653	0.3443	0.3610	
	小林 園田	0.5581	0.8198	0.5621	0.3443	0.3593	
0.15	10	0.5453	0.6987	0.4471	0.3400	0.3563	
	20	0.5758	0.7861	0.5351	0.3419	0.3598	
	R ₁₀₋₂₀	0.5860	0.8152	0.5644	0.3425	0.3610	
	小林 園田	0.5866	0.8130	0.5622	0.3425	0.3613	
0.20	10	0.5768	0.6869	0.4470	0.3387	0.3555	
	20	0.6131	0.7765	0.5348	0.3403	0.3593	
	R ₁₀₋₂₀	0.6252	0.8055	0.5641	0.3408	0.3606	
	小林 園田	0.6258	0.8037	0.5618	0.3409	0.3610	
multiplier		10 ⁻³ ga ² b	10 ⁻² ga ²		10 ⁻³ ga ² /D	10 ⁻² ga ²	

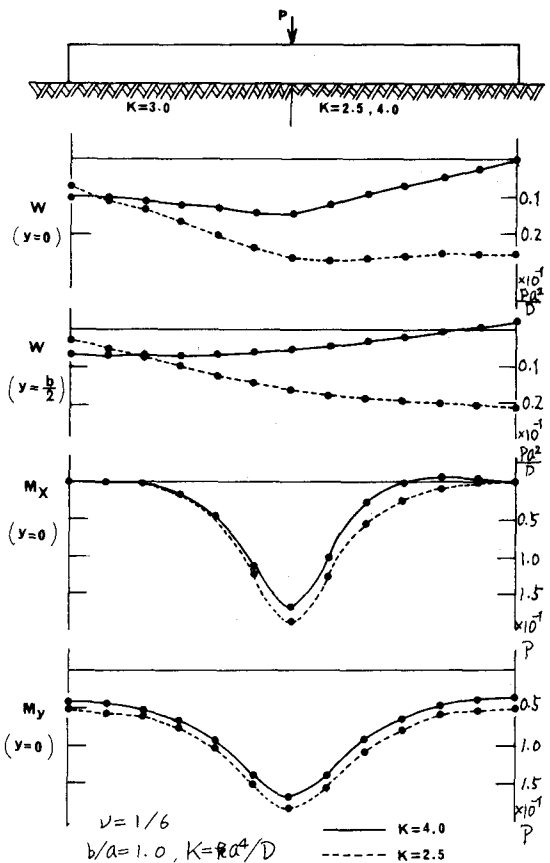


図2 不均一弾性地盤上の矩形板