

北海道大学工学部 正員 芳村 仁
 北海道大学工学部 正員 荏澤 憲吉
 北海道大学工学部 正員 三上 隆

1. まえがき

2直線辺が単純支持された扇形有限帯板法は従来より解法は確立され曲線橋構造の解析に広く用いられ汎用性のある計算機プログラムも提案されている。しかし扇形要素の2直線辺が単純支持という限られた境界条件であるためその適用範囲が制限されるを得ない。例えば、縦方向リブと横リブまたは横リブを補強された扇形板のような曲線鋼床版では円周方向の縦リブは密に配置されているが、放射方向の横リブ間隔は広くとられており、両方向とも巨視的に見た直交異方性板理論を適用するのは無理がある。このような場合、2円弧辺で支持された他の2直線辺に任意の条件をとり得る有限帯板法が有効に適用される可能性がある。扇形平板の特性である放射方向の変形特性を考慮したこの種の解析法は見当らないようなので本報告では先づ基本的な等方性板についてその解析を試みたのでその結果を報告する。

2. 扇形帯板の解析 極座標系における平板の曲げの基本微分方程式は、 w をにわみとすると次のようである。

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (1) \quad \text{ここに } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad h = \text{板厚}$$

$p(r, \theta)$ は作用荷重である。2円弧辺の支持条件を単純支持とすれば(図-1)

$$\left. \begin{array}{l} r=a \\ r=b \end{array} \right\} \text{において } w=0, \quad M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] = 0 \quad (2)$$

これらの条件を満足させるため解を次の形にとる。

$$w = W_1(\rho) T_1(\theta) + W_2(\rho) T_2(\theta) + \cdots + W_m(\rho) T_m(\theta) \quad (3)$$

ここで $\rho = r/a$ であり、 $W_1(\rho) \cdots W_m(\rho)$ は式(2)を満足する関数である。そのような関数として円環板の振動の固有関数を採用するとそれらは次の形で表わすことができる。

$$W(\rho) = J_0(k\rho) + \alpha Y_0(k\rho) + \beta I_0(k\rho) + \gamma K_0(k\rho) \quad (4)$$

ここで k は固有値であり、 $J_0(k\rho)$, $Y_0(k\rho)$ はベッセル関数、 $I_0(k\rho)$, $K_0(k\rho)$ は変形ベッセル関数である。

式(3)を式(1)に代入し Kantorovich法を適用すると $\rho^* = b/a$ として

$$\int_0^{\rho^*} L[w(\rho, \theta)] W(\rho) \rho d\rho = \int_0^{\rho^*} \frac{p}{D} W(\rho) \rho d\rho \quad (5)$$

となる。 θ に関する偏微分を $(\cdot)$ と表わし、 $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$ および $T_3(\theta)$ にかかる被積分関数の係数をそれぞれ D_1 , D_2 および D_3 とおくとそれらは次のようになる。

$$D_1 = k^4 W(\rho), \quad D_3 = \frac{1}{\rho^4} W(\rho)$$

$$D_2 = k^4 \left\{ \frac{2}{k^2 \rho^2} \left(-1 + \frac{2}{k^2 \rho^2} \right) J_0(k\rho) + \frac{4}{k^3 \rho^2} J_1(k\rho) + \alpha \left[\frac{2}{k^2 \rho^2} \left(-1 + \frac{2}{k^2 \rho^2} \right) Y_0(k\rho) + \frac{4}{k^3 \rho^2} Y_1(k\rho) \right] + \beta \left[\frac{2}{k^2 \rho^2} \left(1 + \frac{2}{k^2 \rho^2} \right) I_0(k\rho) - \frac{4}{k^3 \rho^2} I_1(k\rho) \right] + \gamma \left[\frac{2}{k^2 \rho^2} \left(1 + \frac{2}{k^2 \rho^2} \right) K_0(k\rho) + \frac{4}{k^3 \rho^2} K_1(k\rho) \right] \right\} \quad (6)$$

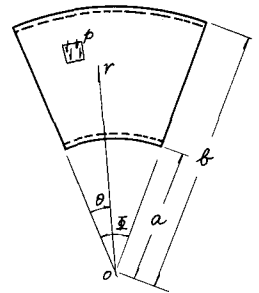


Fig. 1

これらの記号を用いて式(5)を整理すると次のようになる。

$$A \ddot{T}(\theta) + B \dot{T}(\theta) + C T(\theta) = \int_0^{\rho^*} \frac{p}{D} a^4 W(\rho) \rho d\rho \quad \dots \dots \dots (7)$$

ここで $A = \int_1^{\rho^*} D_1 W(\rho) \rho d\rho$, $B = \int_1^{\rho^*} D_2 W(\rho) \rho d\rho$, $C = \int_1^{\rho^*} D_3 W(\rho) \rho d\rho \quad \dots \dots \dots (8)$

$W(\rho)$ は式(4)で与えられる。式(8)の積分は数値積分によって求める。

式(7)の微分方程式の同次解は次のようである。

$$T(\theta) = e^{j\theta} (C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) + e^{-j\theta} (C_3 \cos \theta + C_4 \sin \theta) \quad \dots \dots \dots (9)$$

ここで C_1, C_2, C_3 および C_4 は任意定数である。また p, q は $D = \sqrt{B^2 - 4AC}$ として次のようになる。

$$p = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad q = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad a = \frac{-B}{2A}, \quad b = \frac{\sqrt{-D}}{2A} \quad (D < 0) \quad \dots \dots \dots (10)$$

3. 扇形帯板要素の定式化

図-2 に示す帯板要素の $\theta=0$ および $\theta=\pi$ の節線においては、たわみと回転角を生ずることが可能で合計4つの自由度をもつ。 $w = \sum_{m=1}^r W_m(\rho) T_m(\theta)$ であり $T_m(\theta)$ は式(9)で与えられている。この式中の $C_1 \sim C_4$ を2つの節線におけるたわみ $\bar{w}$ とたわみ角 $\bar{\varphi}$ で表すと

$$\{\delta\} = [N]\{C\} \quad \dots \dots \dots (11)$$

扇形平板のひずみマトリックス $\chi_r, \chi_\theta, \chi_{r\theta}$ は $\chi_r = -a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}$,

$$\chi_\theta = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right), \quad \chi_{r\theta} = \frac{2}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

でありまとめて表示すると $\{\epsilon\} = \frac{1}{a^2} [B]\{C\} \quad \dots \dots \dots (12)$

となる。応力マトリックスは $\{\sigma\} = D[D^*]\{\epsilon\} \quad \dots \dots \dots (13)$

である。

荷重によるポテンシャルエネルギー V は $V = -\int w^T p dA = -a^2 p \int_0^{\rho^*} \int_0^\pi \{\delta\}^T [N]^T [L]^T \rho d\rho d\theta$ と表わされる。

全ポテンシャルエネルギーより要素の剛性マトリックス $[K]$ と荷重ベクトル $\{F\}$ を求めると次のようである。

$$[K] = \frac{D}{a^2} \int_0^{\rho^*} \int_0^\pi [N]^T [B] [D^*] [B] [N] \rho d\rho d\theta, \quad \{F\} = a^2 p \int_0^{\rho^*} \int_0^\pi [N]^T [L]^T \rho d\rho d\theta \quad \dots \dots \dots (14)$$

($p = \text{const.}$)

たわみ w は $m=1 \sim r$ の和になるので $[K]$ の中の $[K]_{mn}$ は次のように表わされる。

$$[K]_{mn} = \frac{D}{a^2} \int_0^{\rho^*} \int_0^\pi [S]_m^T [D^*] [S]_n \rho d\rho d\theta, \quad (m, n = 1 \sim r), \quad [S] = [B][N]^T \quad \dots \dots \dots (15)$$

4. 数値計算例

図-3 に示す周辺単純支持の扇形平板に等分布荷重が作用したときの中央点のたわみ、曲げモーメント M_r, M_θ を正解値と比較すると次のようでありよく一致している。(ポアソン比 $\nu=0$, 中心角 $= \frac{\pi}{6}$, 中央円半径 = 幅員の場合)

要素数 固有値数	6	8	6	8	6	8
2	0.00406	0.004059	0.0403	0.0403	0.0384	0.03719
3		0.004020		0.0368		0.03727
4		0.004023		0.0366		0.03722
5		0.004027		0.0375		0.03732
厳密解	たわみ $0.00403 \frac{pL^2}{D}$		曲げモーメント $M_r = 0.0373 pL^2$		曲げモーメント $M_\theta = 0.0364 pL^2$	

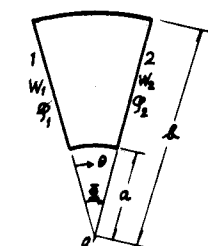


Fig. 2

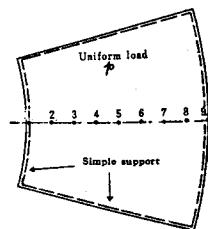


Fig. 3

参考文献 芳村仁：
工学論集 第23巻 pp. 1~10.