I-23　板の座屈解析への境界要素法の応用について

京都大学工学部　正員　丹羽義次
京都大学工学部　正員　渡辺英一
京都大学工学部　正員　広瀬壮一
京都大学工学部　学生員　○杉原直樹

1．はじめに

板の座屈荷重算定の主な手法は級数展開を用いた古典的なものであろう。しかし，この方法では境界条件が複雑になれば厳密な解が得られない場合が多いので，より一般的に座屈荷重を算定する方法が必要とされてきた。近年，有限要素法により数値的に座屈荷重を求める方法が確立された。しかし，有限要素法も，問題の次元数が増加するにつれて入力データが膨大になってゆくこと，計算精度を向上させようとすれば最終的に解くべき方程式の元数がきわめて大きくなって計算時間がかかることなどの欠点が明らかになってきた。この欠点を補う方法として最近注目されているのが境界要素法である。

本研究の目的は，境界要素法を用いて基本的な板の座屈問題の数値解析を行い，座屈問題への境界要素法の適用性を検討することにある。

2．境界要素法による定式化

本研究では以下の２つの場合について定式化を試みる。

1）　一方向に一様な圧縮力を受ける場合

2）　二方向にそれぞれ大きさの異なる一様な圧縮力を受ける場合

1）一方向に一様な圧縮力を受ける場合

薄板のX_1方向に一様な圧縮力N_xが作用するときを考える。このときの線形理論に基づく座屈の支配方程式は次式で表される。

$$\mathbb{L}u = (\Delta^2 - \zeta_1^2 \partial_1^2)\, u = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

ここに，$\Delta^2 = \partial^4/\partial x_1^4 + 2\,\partial^4/\partial x_1^2 \partial x_2^2 + \partial^4/\partial x_2^4$

$\partial_1 = \partial/\partial x_1$ ，$\zeta_1^2 = |N_x|/D$

D：単位幅当りの板の曲げ剛度

N_x：単位長さ当りの圧縮力

また，このときの基本解$U_1(\mathbb{X},\mathbb{Y})$は次のようになる。

$$U_1(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = (i/4\zeta_1)\int_0^{r_1} \sin(\zeta_1 x_1/2)\, H_0^{(1)}\left(\zeta_1\sqrt{x_1^2+r_2^2}/2\right) dx_1$$

$$+ (i/16)\int_0^{r_2}\Big[2x_2 H_0^{(1)}(\zeta_1 x_2/2) + \pi x_2\big\{\mathbb{H}_0(\zeta_1 x_2/2) H_1^{(1)}(\zeta_1 x_2/2)$$

$$- \mathbb{H}_1(\zeta_1 x_2/2) H_0^{(1)}(\zeta_1 x_2/2)\big\}\Big] dx_2$$

ここで，$\int_D U_1 \mathbb{L} u\, dA - \int_D u \mathbb{L} U_1\, dA$ なる式を考える。ただし，Dは領域，ｄＡは領域の微小面積を表す。この式にガウスの発散定理を適用し，境界への極限操作を行い，さらに矩形板であることを利用すると次の境界積分方程式を得る。

$$(1/2)u(x) = [\mathbb{S}(V_n u)](x) - [\mathbb{D}(M_n u)](x)$$

$$+ [\mathbb{M}(\partial_n u)](x) - [\mathbb{V}(u)](x)$$

$$+ \zeta_1^2 \int_{\partial D_{24}} \big[U_1(x,y)\{\partial_n u(y)\} - \{\partial_{ny} U_1(x,y)\} u(y)\big] dS_y \qquad \cdots (2\text{-}2)$$

$$(1/2)(\partial_n u)(x) = [\partial_n \mathbb{S}(V_n u)](x) - [\partial_n \mathbb{D}(M_n u)](x)$$

$$+ [\partial_n \mathbb{M}(\partial_n u)](x) - \lim_{\mathbb{X}\to x} [\partial_{nx} \mathbb{V}(u)](\mathbb{X})$$

$$+ \zeta_1^2 \int_{\partial D_{24}} \big[\{\partial_{nx} U_1(x,y)\}\{\partial_n u(y)\} - \{\partial_{nx}\partial_{ny} U_1(x,y)\} u(y)\big] dS_y \qquad \cdots (2\text{-}3)$$

ここに，$(\mathbb{S}\mu_0)(\mathbb{X}) = \int_{\partial D} U(\mathbb{X},y)\, \mu_0(y)\, dS_y$

$(\mathbb{D}\mu_1)(\mathbb{X}) = \int_{\partial D} \{\partial_{ny} U(\mathbb{X},y)\}\, \mu_1(y)\, dS_y$

$(\mathbb{M}\mu_2)(\mathbb{X}) = \int_{\partial D} \{M_{ny} U(\mathbb{X},y)\}\, \mu_2(y)\, dS_y$

$(\mathbb{V}\mu_3)(\mathbb{X}) = \int_{\partial D} \{V_{ny} U(\mathbb{X},y)\}\, \mu_3(y)\, dS_y$

$T_r M_n(\cdot) = T_r[\Delta(\cdot) - (1-\nu)\partial_s^2(\cdot)]$

$T_r V_n(\cdot) = T_r \partial_n \Delta(\cdot) + (1-\nu)\partial_s T_r(\partial_n \partial_s(\cdot))$

$T_r = \lim_{\mathbb{X}\to x}$ 　　$x \in \partial D$ ，$\mathbb{X} \in D$

∂Dは領域の境界を表し，∂D_{24}は(2-3)辺，(4-1)辺を表す。また，∂_nは法線方向微分，∂_sは接線方向微分，νはポアソン比を表す。∂_{ny}等，微分演算子にｘ，ｙ等の添字のついているものは，その点においての演算を意味する。

2）二方向にそれぞれ大きさの異なる一様な圧縮力を受ける場合

X_1方向に一様圧縮力N_xが，X_2方向に一様圧縮力N_yが作用するときを考える。このときの座屈の支配方程式は次のようになる。

$$\mathbb{L}u = (\Delta^2 + \zeta_1^2\partial_1^2 + \zeta_2^2\partial_2^2)\,u = 0 \qquad (2\text{-}4)$$

ここに，$\zeta_1 = |N_x|/D$，$\zeta_2 = |N_y|/D$

また，このときの基本解$\mathbb{U}_2(\mathbb{X},\mathbb{Y})$は，$X_1$方向に一様圧縮力$N_x$が作用しているときの基本解$\mathbb{U}_1(\mathbb{X},\mathbb{Y})$と，$X_2$方向に一様圧縮力$N_y$が作用しているときの基本解$\mathbb{U}_1'(\mathbb{X},\mathbb{Y})$を重ね合せの原理に基づき加え合せることによって得られる。よって，このときの基本解$\mathbb{U}_2(\mathbb{X},\mathbb{Y})$は次式で表される。

$$\mathbb{U}_2(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = (1/2)\{\mathbb{U}_1(\mathbb{X},\mathbb{Y}) + \mathbb{U}_1'(\mathbb{X},\mathbb{Y})\}$$

ただし，$\mathbb{U}_1'(\mathbb{X},\mathbb{Y})$は$X_1$方向に一様圧縮力$N_y$が作用しているときの基本解の座標を90° 回転することによって得られる。

このときの境界積分方程式は1)のときと同様にして求められる。

$$(1/2)\,u(x) = [\mathbb{S}(V_n u)](x) - [\mathbb{D}(M_n u)](x) + [\mathbb{M}(\partial_n u)](x) - [\mathbb{V}(u)](x)$$
$$+ \zeta_1^2\int_{\partial D_{24}}[\mathbb{U}_2(x,y)\{\partial_n u(y)\} - \{\partial_{ny}\mathbb{U}_2(x,y)\}u(y)]\,dS_y$$
$$+ \zeta_2^2\int_{\partial D_{13}}[\mathbb{U}_2(x,y)\{\partial_n u(y)\} - \{\partial_{ny}\mathbb{U}_2(x,y)\}u(y)]\,dS_y \qquad \cdots (2\text{-}5)$$

$$(1/2)(\partial_n u)(x) = [\partial_n\mathbb{S}(V_n u)](x) - [\partial_n\mathbb{D}(M_n u)](x) + [\partial_n\mathbb{M}(\partial_n u)](x) - \lim_{x\to x}[\partial_{nx}\mathbb{V}(u)](x)$$
$$+ \zeta_1^2\int_{\partial D_{24}}[\{\partial_{nx}\mathbb{U}_2(x,y)\}\{\partial_n u(y)\} - \{\partial_{nx}\partial_{ny}\mathbb{U}_2(x,y)\}u(y)]\,dS_y$$
$$+ \zeta_2^2\int_{\partial D_{13}}[\{\partial_{nx}\mathbb{U}_2(x,y)\}\{\partial_n u(y)\} - \{\partial_{nx}\partial_{ny}\mathbb{U}_2(x,y)\}u(y)]\,dS_y \qquad \cdots (2\text{-}6)$$

ここに，∂D_{13}は(1-2)辺，(3-4)辺を表す。

また，基本的な境界条件としては次の3種類が考えられる。

1）固定支持条件

$$\mathrm{Tr}\,u(x) = \mathrm{Tr}\,\partial_n u(x) = 0 \qquad x \in \partial D$$

2）単純支持条件

$$\mathrm{Tr}\,u(x) = \mathrm{Tr}(M_n(u(x))) = 0 \qquad x \in \partial D$$

3）自由支持条件

$$\mathrm{Tr}(M_n(u(x))) = \mathrm{Tr}(V_n(u(x))) = 0 \qquad x \in \partial D$$

さらに，これらの組合せとして混合支持条件が考えられる。

3．数値解析例

ここでは，一方向に一様な圧縮力を受ける場合の数値解析について述べておく。(2-2)，(2-3)式を一定要素を用いて離算化する。数値解析の方法としては，荷重パラメータζ_1を少しずつ変化させ，境界積分方程式系の係数行列の複素行列式を計算し，行列式を0とする荷重をもって座屈荷重とみなす。数値解析のとき注意することは係数行列の各要素を求める場合，数値的に評価しなければならないが，そのとき，field pointとsource pointが一致するところでは級数展開によって解析的に評価し一致しないところではガウスの数値積分を行なう。

全辺固定支持条件(Fig. 1)の場合の結果をTable. 1に示す。表において，$\bar{\zeta}_j$は文献1）のp. 387のTable9-15の値に基づいて計算された理論解であり，ζ_jは今回の数値解析によって得られた解である。第3欄には誤差の百分率が書かれている。

今回の計算は1辺4分割で行ったが，それだけの分割数でもかなり精度の良い結果が得られた。

その他の数値解析例については当日報告する。

Table. 1　全辺固定支持条件の座屈荷重

a/b	0.75	1.0	1.25
$\bar{\zeta}_j$	10.74	9.96	9.55
ζ_j	10.76	9.91	9.36
$\lvert\bar{\zeta}_j-\zeta_j\rvert/\bar{\zeta}_j$ (%)	0.19	0.50	1.99

(N=16, $\Delta\zeta$=0.01)

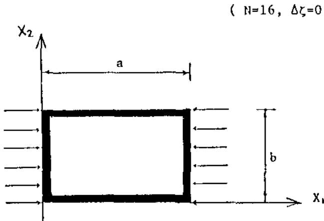

Fig. 1　全辺固定支持条件の板

参考文献

1) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere; Theory of Elastic Stability, 2nd Edition, McGraw-Hill, 1961.

2) Kitahara, M.; Applications of Boundary Integral Equation Methods to Eigenvalue Problems of Elastodynamics and Thin Plates, Unpublished, Doctor's Thesis, Kyoto University, 1984.