

岩手大学工学部 正会員 ○出戸 秀明

岩手大学工学部 正会員 宮本 裕

岩手大学工学部 正会員 岩崎 正二

1. ま え が き

はりの微分方程式を解く方法のひとつとして、無限長はりの静的曲げ問題の基本解を用いた、境界積分方程式による手法があり、前回の報告ではこの手法による基本解が未知の変断面ばりの解法として、等断面ばりの基本解を用いたモデルの離散化による数値解法について述べているが、本報告では、この数値解法の適用による多径間連続変断面ばりの解法を示し、2径間、3径間連続変断面ばりの数値解析例について、結果が厳密解と一致することを確認している。

2. 解 析 理 論

変断面ばりに分布荷重 $q(x)$ が作用するときの微分方程式は、式(1)で与えられる。

$$E_0 I_0 \frac{d^2}{dx^2} \left[\alpha(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = q(x) \quad \begin{array}{l} E_0 I_0 : \text{ある基準点での曲げ剛性} \\ \alpha(x) : \text{曲げ剛性の変化を表わす関数} \end{array} \quad (1)$$

また、等断面はりの基本解 $w_0^*(x, y)$ は、式(2)で定義される。

$$E_0 I_0 \frac{d^4 w_0^*(x, y)}{dx^4} = \delta(x - y) \quad \delta : \text{デルタ関数} \quad (2)$$

式(1)の両辺に等断面はりの基本解 $w_0^*(x, y)$ をかけスパン l にわたって積分し、 $w(x)$ の微係数がとれるまで部分積分を繰り返し、デルタ関数の性質を考慮すれば y 点でのたわみを表わす式が得られ、変断面ばり本来の基本解を用いた式では境界量だけが未知量となるが、ここでは等断面はりの基本解を用いたために、たわみに関する積分項も未知量として現われ、 $y = a + \varepsilon$, $y = b - \varepsilon$ (ε は微小な正定数) としたときの $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えることにより得られる4本の方程式だけでは解けないことになる。

そこで、スパン l を n 分割し、たわみを Gauss の積分公式により近似することにより点 y でのたわみを表わす式を、分割点及び境界点での $n+1$ 本の式に直した離散化による数値解析法が考えられる。

これら $n+1$ 本の式に、点 y でのたわみの式を y について1回微分した式より導かれる境界における2本の式を加え、マトリックス式に直し整理して式(3)を得る。

$$\{G, H\} \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_{n+1}, Q(b), M(b), \theta(b), Q(a), M(a), \theta(a)\}^T \\ = -\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n+3}\}^T \quad (3)$$

ただし、 G は たわみ $w_1 \sim w_{n+1}$ にかかる係数行列、 H は境界量にかかる係数行列。

式(3)の未知量のうち境界条件より定まる4個の境界量を除けば残りの未知量が得られ、これにより基本解が未知の変断面ばりの問題が解けたことになる。なお詳細については参考文献2)、5)に譲る。

3. 連 続 ば り の 解 析

2. で述べた数値解析法を適用し、Fig. -1 に示す分布荷重 $q(x)$ の作用する2径間連続変断面ばりの問題において、いま、SPAN-1の n 分割を考え、境界条件より、 $w(a) = w(b) = 0$, $M(a) = 0$ を式(3)に代入し式(4)を、SPAN-2についても同様にして、境界条件より、 $w(a) = w(b) = 0$, $M(b) = 0$ を代入し、式(5)を得る。

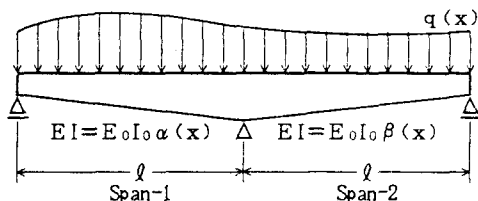


Fig. -1. 2-span Continuous Beam with Varying Cross Section.

$$\{G^1, H^1\} \{w_2^1, w_3^1, w_4^1, \dots, w_n^1, Q(b)^1, M(b)^1, \theta(b)^1, Q(a)^1, \theta(a)^1\}^T \\ = -\{q_1^1, q_2^1, q_3^1, \dots, q_{n+3}^1\}^T \quad (4)$$

$$\{G^2, H^2\} \{w_2^2, w_3^2, w_4^2, \dots, w_n^2, Q(b)^2, \theta(b)^2, Q(a)^2, M(a)^2, \theta(a)^2\}^T \\ = -\{q_1^2, q_2^2, q_3^2, \dots, q_{n+3}^2\}^T \quad (5)$$

$$M(b)^1 = M(a)^2, \quad \theta(b)^1 = \theta(a)^2 \quad \text{--- (6)}$$

ここで、式(4)、(5)に、SPAN-1, 2の連続条件式(6)を加え、

$$\begin{bmatrix} G^1 & 0 & H^1 & 0 \\ 0 & G^2 & 0 & H^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ X^1 \\ X^2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{--- (7)}$$

式(7)より2径間連続変断面ばりの問題が解けることになり、さらに多径間の場合にも、同様にして支点数だけ連続条件式を加えることにより解析可能となる。

4. 数値解析例

数値計算は等分布荷重の作用する単純支持の変断面連続ばりで、2径間連続ばりでは $\alpha(x) = 1 + m(x/\ell)$, $\beta(x) = 1 + m(1 - x/\ell)$ (m は任意) のはりで、 $m = 1.0$, $n = 6$ (スパン ℓ を6分割) とし、3径間連続ばりでは $\alpha(x) = 1 + m(x/\ell)^2$, $\beta(x) = 1 + m(1 - 2x/\ell)^2$, $\gamma(x) = 1 + m(1 - x/\ell)^2$ (m は任意) のはりで、 $m = 1.0$, $n = 4$ (スパン ℓ を4分割) としたときの計算結果を Table-1. 及び、Table-2. に示す。

ここで、2径間連続ばりの計算結果(Table-1.)を例にとると $w_2 \sim w_6$, $w_8 \sim w_{12}$ は分割点でのたわみを表わし、 w_1, w_7, w_{13} は支点でのたわみでゼロ。 $\theta_1, \theta_7, \theta_{13}, Q_1, Q_7, Q_{13}$ はそれぞれ支点でのたわみ角とせん断力、 M_7 は中間支点でのモーメントを表わす。Table-2. についても同様である。

なお個々の値については上段が本手法によるガウスの10点公式を用いたたわみを放物線近似したもの、下段は厳密解である。

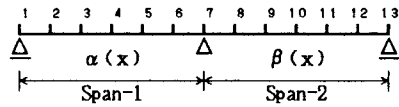
6. ま と め

Table-1., Table-2. と同下段の値は、 $E \times I \times d^2 w(x)/dx^2 = -M(x)$ より誘導した厳密解であるが、これに比べ上段の、等断面ばりの基本解を用いた本手法による結果が十分な精度を持つこと、さらに支点の連続条件を考慮することにより、多径間連続ばりの解析も本手法により可能であることが明らかとなった。

参 考 文 献

- 1) 田中正隆・田中喜久昭：境界要素法—基礎と応用，丸善(1982)
- 2) 出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二：境界積分方程式による変断面ばりの解法，岩手大学工学部研究報告第37巻(1984)
- 3) 出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二：境界要素法による変断面ばりの解法について，土木学会第39回講演概要集(1984)
- 4) 登坂宣好・角田和彦：積分方程式法による境界値問題の近似解法，日本建築学会論文報告集第329号(1983)
- 5) 出戸秀明・宮本 裕・岩崎正二：境界積分方程式によるはりの解法について，第1回境界要素法シンポジウム(1984)

Table-1. Result of Calculation
2-span Continuous Beam



w_2, w_{12}	2.23446 2.23435	$\theta_1, -\theta_{13}$	1.47828 1.48833
w_3, w_{11}	3.42988 3.42975	θ_7	0.00000 0.00000
w_4, w_{10}	3.30965 3.30956	$-M_7$	1.37101 1.37100
w_5, w_9	2.17708 2.17702	$Q_1, -Q_{13}$	3.62899 3.62900
w_6, w_8	0.74008 0.74004	Q_7	6.37101 6.37100

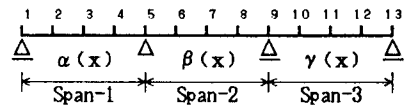
$$w: 10^{-3} \cdot q \ell^4 / E o I o$$

$$\theta: 10^{-2} \cdot q \ell^3 / E o I o$$

$$M: 10^{-1} \cdot q \ell^2$$

$$Q: 10^{-1} \cdot q \ell$$

Table-2. Result of Calculation
3-span Continuous Beam



w_2, w_{12}	4.40817 4.40911	$\theta_1, -\theta_{13}$	2.10030 2.09988
w_3, w_{11}	5.27667 5.27700	$\theta_5, -\theta_9$	-0.71737 -0.71725
w_4, w_{10}	2.84402 2.84383	M_5, M_9	-1.09093 -1.09110
w_6, w_8	-0.04971 -0.04978	$Q_1, -Q_{13}$	3.90907 3.90890
w_7	-0.01711 -0.01685	$Q_5^L, -Q_9^R$	-6.09093 -6.09100
		$Q_5^R, -Q_9^L$	3.00000 3.00000

$$w: 10^{-3} \cdot q \ell^4 / E o I o$$

$$\theta: 10^{-2} \cdot q \ell^3 / E o I o$$

$$M: 10^{-1} \cdot q \ell^2$$

$$Q: 10^{-1} \cdot q \ell$$