

東京工業大学 学生員 依知川 哲治
 東京工業大学 正 員 吉田 裕
 東京工業大学 正 員 野村 卓史

1. はじめに 水で飽和された地盤の振動問題および圧密問題の力学的挙動は、土骨格の特性のみならず間隙水部分の影響を受ける事となる。この間隙水の影響に着目した理論の一つに、Biotによる、飽和地盤を水の充満した多孔質体として扱って定式化された理論があり、これに基づいて間隙水の移動、消散の影響を表現し得る飽和地盤の動的解析法を有限要素法により構成したのでここに報告する。

2. 基礎方程式とその空間に関する離散化 Biotの理論において、水で飽和された多孔質体の単位体積当りの動的つりあい式は次の様な方程式となる。

$$\text{土塊全体} : (\sigma'_{ij} - p\delta_{ij}),_{,j} = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \quad (1)$$

$$\text{間隙水部分} : -p_{,i} = \rho_f \ddot{u}_i + m \ddot{w}_i + \frac{\rho_f g}{k(i)} \dot{w}_i \quad (2)$$

但し、 $m = (f\rho_f + \rho_a)/f^2$, f : 間隙率

ここに、 σ'_{ij} は有効応力、 P は間隙水圧、 u_i は土骨格の変位、 w_i は骨格と間隙水圧部分の相対変位であり、また、 ρ 、 ρ_f は土塊および間隙水の密度、 ρ_a は骨格、間隙水両者の相互作用による付加質量、 $k(i)$ は透水係数、 g は重力加速度である。

応力-ひずみ関係は、ここでは骨格部分の応力-ひずみ関係が線形弾性、間隙水が圧縮性を持つ場合を対象とする。このとき、次の様な関係となる。

$$\sigma'_{ij} - p\delta_{ij} = 2Ne_{ij} + \delta_{ij}(\lambda_c e - \alpha M\xi) \quad (3)$$

$$p = -\alpha Me + M\xi$$

但し

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad e = u_{i,i}, \quad \xi = w_{i,i}$$

ここに、 N はせん断に関する材料定数、 λ_c 、 α 、 M は圧縮性に関する材料定数である。

本研究では、動的つりあい式 (1)、(2) 式に対し、(3) 式を代入し、変位 u 、 w の分布を重み関数に、Galerkin法の手法に従ってそれぞれ空間に関する離散化を行った。ここで変位 u 、 w に対して用いた補間関数はいずれも要素内線形補間の関数である。離散化により得られたマトリックス方程式は、連立させて次の様に書くことができる。

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\beta} \\ M_{\beta\alpha} & M_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{\alpha} \\ F_{\beta} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

(4) 式に対し、境界条件を導入し、変位 u 、 w を未知の項と既知の項に分離し、縮約すると、 u 、 w の未知の部分をもとめて V とおく事により解くべき方程式は次の様になる。

$$M \ddot{V} + C \dot{V} + K V = F \quad (5)$$

ここで、係数マトリックス M 、 C 、 K はいずれも対称なマトリックスである。

3. 方程式の直接時間積分 空間の離散化により、得られた時間に関する2階のマトリックス方程式 (5) に対し、本研究では次の様な漸化関係により解法を構成した。(5) 式は、これと等価な次の様な1階の方程式に変換でき、

$$\begin{bmatrix} (C-M-K)^{-1} & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{S} \\ \dot{V} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (C-M-K)^{-1} & I \\ I & C-M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^* \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

但し、 $S = -M \dot{V} - (C-M)V$, $F^* = -(C-M-K)^{-1}F$

I : 単位行列

これに対し、著者らが開発した高精度直接時間積分法を適用する事により、時刻 $t=t_i$ から t_{i+1} への変数 ϕ^* を介した次の様な漸化関係式が得られる。

$$\begin{aligned} k_{11}^* \phi^* &= x_{ti}^* + f_{i,i+1}^* \\ x_{ti+1}^* &= -k_{11}^* \phi^* + f_{i+1,i}^* \end{aligned} \quad (7)$$

但し、

$$x_{ti}^* = \begin{Bmatrix} -\dot{v}_{ti} - (C^*-I)v_{ti} \\ v_{ti} \end{Bmatrix}, \quad x_{ti+1}^* = \begin{Bmatrix} -\dot{v}_{ti+1} - (C^*-I)v_{ti+1} \\ v_{ti+1} \end{Bmatrix}$$

$$f_{i,i+1}^* = -\frac{1}{6}M^2 \begin{Bmatrix} 2F_{ti} + F_{ti+1} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad f_{i+1,i}^* = -\frac{1}{6}M^2 \begin{Bmatrix} 2F_{ti+1} + F_{ti} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$k_{11}^* = \begin{bmatrix} (1 + \frac{1}{tm})I + \frac{tm}{3}(C^*-K^*) & \frac{tm}{3}\{(C^*-K^*)C^*-C^*\} + (C^*-I) - I \\ \frac{tm}{3}C^* + I & \frac{tm}{3}\{C^*C^*-C^*-K^*\} + C^* + (\frac{1}{tm}-1)I \end{bmatrix}$$

$$k_{21}^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{tm}I + \frac{tm}{6}(C^*-K^*) & \frac{tm}{6}\{(C^*-K^*)C^*-C^*\} \\ \frac{tm}{6}C^* & \frac{tm}{6}\{C^*C^*-C^*-K^*\} - \frac{1}{tm}I \end{bmatrix}$$

$C^* = M^2 C$, $K^* = M^2 K$, tm : 積分時間間隔

1 ステップの求解過程は、時刻 $t=t_i$ における変

位 $v_{t,i}$ およびその時間微分 $\dot{v}_{t,i}$ 、1つの積分時間
隔の両端の時刻 t_{i-1} 、 t_i における外力 $F_{t,i}$ 、 $F_{t,i+1}$
が与えられる事により、(7)式の漸化関係式を用
いて時刻 t_{i+1} における変位 $v_{t,i+1}$ および $\dot{v}_{t,i+1}$ が求
められ、さらに変位により応力、間隙水圧が求め
られる、というものである。

この漸化関係式では、 k_{11}^* 、 k_{21}^* の作成のた
めのアルゴリズムがかなり複雑となるがこの過程
において必要とする逆行列は M^2 のみであり、また、
時間方向に解き進めていく段階では連立一次方程
式を解く事のみでよく、逆行列計算は必要としない。
また、この直接積分法は、無条件安定な解法
となっているが、積分法の詳細についての報告は
他の機会に譲りたい。

4. 解析例 Biotの多孔質弾性体の理論に対する
解析解は、調べた限りにおいては見つける事ができ
なかったため、構成した解析法の妥当性の検証とし
て、一次元圧密問題を図-1のモデルで解析し、Te-

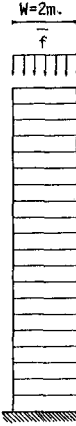


図-1

解析モデル1

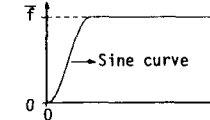


図-3 荷重の立ち上げ

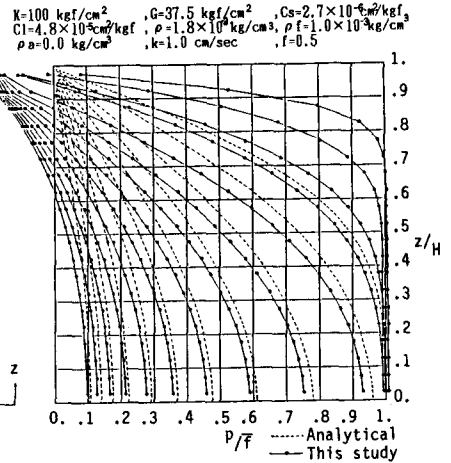


図-2 無次元化間隙水圧の

等時曲線

地盤
建物
K=100 kgf/cm², G=37.5 kgf/cm², Cs=2.7×10⁻⁶ m²/kgf
Cl=4.8×10⁻⁶ cm²/kgf, ρ=1.8×10⁻³ kg/cm³, ρf=1.0×10⁻³ kg/cm³
ρa=0.0 kg/cm³, k=0.1 cm/sec, f=0.5
K=2.0×10⁶ kgf/cm², G=7.5×10⁵ kgf/cm²
ρ=2.0×10⁻³ kg/cm³

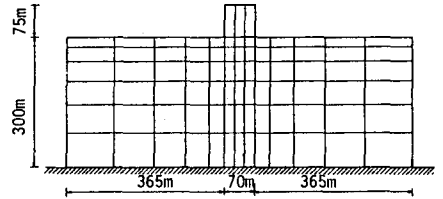


図-4 解析モデル2

rzaghiの理論解と比較を行った。図-2は間隙水圧の深さ方向
の分布を時間を追って示したもので破線がTerzaghiの理論解、
実線が本解析の結果である。本解析では上部にかかる荷重は図
-3の様にあらかじめ立ち上げた後一定として解析した。解析
結果は、上部では理論解とかなりずれているものの、全体とし
てはよく対応した結果となっている。次に、地盤上に建物が建
っている問題に対して図-4のモデル解析した。荷重条件は人
工的なものではあるが、建物部分に対し、その自重に相当する
荷重を、1秒間でなめ
らかに立ち上げた後、
その直後から地盤の底
部を強制的に振動させ
た。図-5は変形図、
図-6は間隙水圧の分
布図である。変形図よ
り地盤の振動による変
形と建物の圧密による
沈下が並行して起っ
ている様子が、間隙水
圧分布図より間隙水の消
散の様子が見られる。

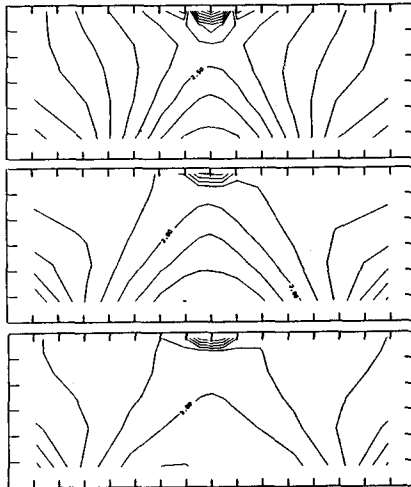


図-6 間隙水圧の分布(上からt=3,7,17秒)

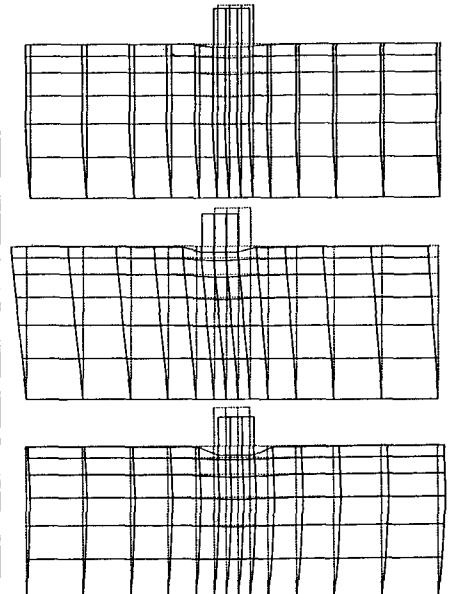


図-5 変形図(上からt=3,7,17秒)

(参考文献)

- 1) Biot, M.A., 'Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media' J. Appl. Phys. vol. 33, No. 4, 1962
- 2) 吉田, 藤原, 野村, '熱伝導型方程式の直接時間積分と高精度化のアルゴリズム' 土論集, 1981, 9