I-20　境界積分方程式法による軸対称弾性体の解析

福井大学大学院　学生員　○北川　康孝
福井大学工学部　正　員　　福井　卓雄

1．まえがき

本報告では，境界積分方程式を用いた軸対称弾性体の解析について述べ，いくつかの解析例をあげてその有用性を示し，今後の課題となる問題について考察を行なう．軸対称弾性体の境界上で仮定した一重層密度と与えられた境界条件とを周方向にFourier展開すると，それらの係数関数の間に項別に独立な積分方程式が得られる．それら項別の積分方程式をといて解を重ね合せることにより，軸対称弾性体の解が得られる．従ってこの解析手法では取り扱う物理量すべてを線境界上のみに集約でき，ＦＥＭなどの領域型解法と比べ入力データを短縮し，最終的に構成される連立方程式の元数を少なく要素分割数に対する解の精度を高めることができる．しかし，問題点もあり，特に薄肉構造物の解析において，剛性マトリックスの正則性が悪化し解の確定が困難になる傾向がみられる．

2．解析方法

空間Ｅ中に直交座標系(x_1, x_2, x_3)を取り　x_3軸について軸対称な等方・等質の弾性体を考える．この弾性体中の変位$u_K(x)$が境界上に分布した密度p_Lによる一重層ポテンシャルにより，

$$(1)\quad u_K(\bar{x}) = \int_{\partial B} G_{KL}(\bar{x};\bar{y})P_L(\bar{y})ds_y$$

$$G_{KL}(\bar{x};\bar{y}) = Q_{Ki}(\theta)G_{ij}(\bar{x};\bar{y})Q_{Lj}(\phi)$$

となる．ここで$G_{ij}(x;y)$はKelvin解であり，$Q_{Ki}(\theta)$，$Q_{Lj}(\phi)$は直交変換行列である．問題を取り扱い易くするために Fig.1のように円筒座標系に変換されている．小文字の添字と大文字の添字はそれぞれ直交座標系と円筒座標系を表す．

$$[Q_{Ki}(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

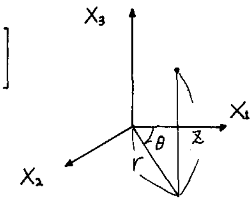


Fig.1　円筒座標系

次に，式(1)のu_KをθについてFourier展開すると，

$$(2)\quad u_K(\bar{x}) = \frac{1}{2}u_K^{(0)}(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\{u_K^{(m)}(x)\cos(m\theta) + \tilde{u}_K^{(m)}(x)\sin(m\theta)\}$$

$$u_K^{(m)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\partial B}\int_0^{2\pi} G_{KL}(\bar{x};\bar{y})\cos(m\theta)d\theta ds_y$$

$$\tilde{u}_K^{(m)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\partial B}\int_0^{2\pi} G_{KL}(\bar{x};\bar{y})\sin(m\theta)d\theta ds_y$$

となる．点ｘ，ｙについてはそれぞれ(r, z),(ρ, ζ)面内の点を示し，∂Bは(r, z)面内の境界であり,ds_yはその線素である．そして境界上の密度p_LのϕについてのFourier展開，

$$p_L(\bar{y}) = \frac{1}{2}p_L^{(0)}(y) + \sum_{n=1}^{\infty}\{p_L^{(n)}(y)\cos(n\phi) + \tilde{p}_L^{(n)}(y)\sin(n\phi)\}$$

を(2)式に代入し，θとϕについて周方向に積分すると次の一群の積分方程式が得られる．

$$(3)\quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}^{(n)}(x) = \int_{\partial B}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{13} & \tilde{\Gamma}_{12} \\ \tilde{\Gamma}_{31} & \tilde{\Gamma}_{33} & \tilde{\Gamma}_{32} \\ \Gamma'_{21} & \Gamma'_{23} & \Gamma'_{22} \end{bmatrix}^{(n)}(x;y)\begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ \tilde{p}_2 \end{bmatrix}^{(n)}(y)ds_y$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_3 \\ u_2 \end{bmatrix}^{(n)}(x) = \int_{\partial B}\begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}'_{11} & \tilde{\Gamma}'_{13} & \Gamma'_{12} \\ \tilde{\Gamma}'_{31} & \tilde{\Gamma}'_{33} & \Gamma'_{32} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{23} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}^{(n)}(x;y)\begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_3 \\ p_2 \end{bmatrix}^{(n)}(y)ds_y$$

ここで，

$$\Gamma_{KL}^{(n)}(x;y) = \frac{1}{\pi^2}\iint_0^{2\pi} G_{KL}(\bar{x};\bar{y})\cos(n\phi)\cos(n\theta)\rho d\phi d\theta$$

$$\tilde{\Gamma}_{KL}^{(n)}(x;y) = \frac{1}{\pi^2}\iint_0^{2\pi} G_{KL}(\bar{x};\bar{y})\sin(n\phi)\cos(n\theta)\rho d\phi d\theta$$

$$\Gamma'^{(n)}_{KL}(x;y) = \frac{1}{\pi^2}\iint_0^{2\pi} G_{KL}(\bar{x};\bar{y})\cos(n\phi)\sin(n\theta)\rho d\phi d\theta$$

$$\tilde{\Gamma}'^{(n)}_{KL}(x;y) = \frac{1}{\pi^2}\iint_0^{2\pi} G_{KL}(\bar{x};\bar{y})\sin(n\phi)\sin(n\theta)\rho d\phi d\theta$$

である．

境界応力の成分についても，(3)式と同様な方程式を導くことができる．従って境界条件を(2)式のようにFourier展開し，(3)式の積分方程式を解いて，解析点の各項ごとの変位（応力）をFourier級数として重ね合せれば，軸対称弾性体の解を得る事ができる．

3．数値解析例

様々な構造物について数値計算を行なったが，以下の例をあげておくことにする．なお，当日の発表において，その他の解析例と考察を述べる．

例－1　ケーソン．

荷重条件

a）軸対称荷重　水圧

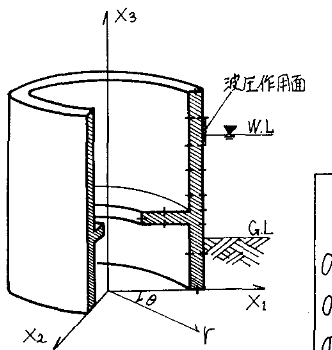
土圧

b）非軸対称荷重

水面上の要素に波圧が作用する．

波圧=F cos θ　$(\frac{\pi}{2} > \theta > -\frac{\pi}{2})$

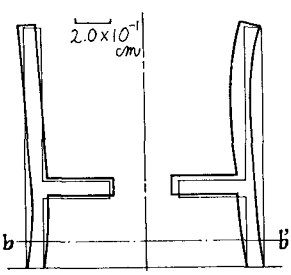
ただし，Fはケーソンの最深部の水圧に等しいと仮定．



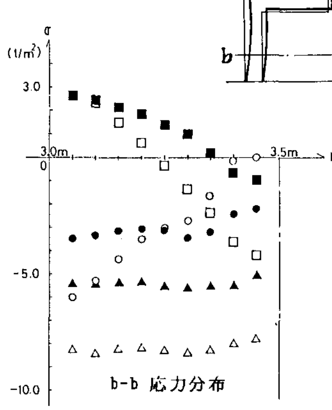
ELEMENTS=25

E=2.1×10^5 t/m²

ν=0.25



X₁-X₃平面の断面形状変位



b-b 応力分布

例－2　球形タンク．

地震動による動水圧分布値（Housnerの近似式）

$$P=\sqrt{3}\,k_h \gamma_w H\left\{\frac{y}{H}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{H}\right)^2\right\}\tanh\left(\sqrt{3}\frac{R}{H}\right)\cos\phi$$

k_h：水平震度　0.2

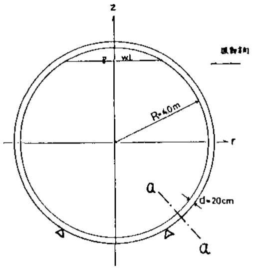
γ_w：水の単位体積重量　1.0 t/m³

y：表面からの深さ

H：全水深　7.464m

φ：振動方向と動水圧Pの作用方向のなす角

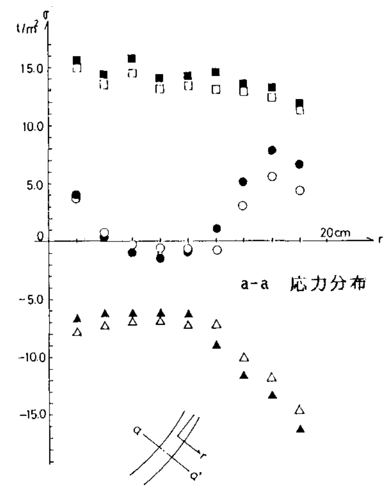
R：半径　4.0m



E=2.1×10^5 t/m²

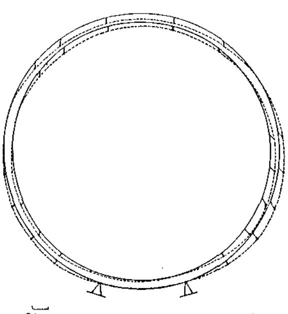
ν=0.25

ELEMENTS=23



a-a　応力分布

応力成分	θ=0°	θ=180°
σ_{rr}	●	○
$\sigma_{\theta\theta}$	▲	△
σ_{zz}	■	□



X₁-X₃平面の断面形状変位

4．参考文献

Kermandis.T, A Numerical Solution for Axially Symmetrical Elasticity Problem, Solid Structure, Vol.11, 493-500, 1974

Mary.M, Drexler.W and Kuhn.G, A Semianalytical Boundary Integral Approach for Axisymmetric Elastic Bodies with Arbitrary Boundary Conditions, J.Solids & Structures, Vol.16, 1980

葛　紀夫，山地　成一，軸対称体の周辺積分有限要素法，日本機械学会論文集（A編），第48巻429号，598-606，1982