

1. まえがき 異方性体の中で良く見受けられる横等方性体の解については, grad. 及び rot. タイプの H. Elliott 及び A. Lodge の解が良く知られている。このうち, Elliott の解は, 弾性定数より定められる 2 次方程式の 2 つの根に立脚して極めて巧みな解であるが, 2 次方程式の根が等根となった場合或いは等根の特別な場合である等方性体に特殊化した場合には, 解が縮退して適用困難となる。

著者は, この Elliott の解の短所を改良した横等方性体の一般解を前回報告した。その解によれば, 等根の場合或いは更に特別な等方性体の場合についても, 何ら困難なく, 円柱座標における有限体或いは無限体の軸対称及び非軸対称問題が解析できる。今回は, 前回報告した一般解の応用例として, 側面に帯状圧力を受けた有限円柱の軸対称問題を解析したので報告する。

2. 円柱座標における横等方性体の一般解 前回報告した円柱座標における横等方性体の一般解をまとめて書くと, 次のとおりである。

$$u_r = \frac{2}{\partial r} \left\{ \phi_1 + \phi_3 + r \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + r \frac{\partial \phi_3}{\partial r} \right) - \frac{2C_{11}V_2}{C_{11}V_2 - C_{44}} \lambda_2 \phi_1 - \lambda_3 \phi_3 \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \dots (1a)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{2}{\partial \theta} \left\{ \phi_1 + \phi_3 + r \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + r \frac{\partial \phi_3}{\partial r} \right) - \frac{2C_{11}V_2}{C_{11}V_2 - C_{44}} \lambda_2 \phi_1 - \lambda_3 \phi_3 \right\} - \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \dots (1b)$$

$$u_z = \frac{2}{\partial z} \left\{ \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_3 + r \left(\lambda_1 r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \lambda_2 r \frac{\partial \phi_3}{\partial r} \right) - \lambda_1 \lambda_3 \phi_1 \right\} - \frac{2C_{11}V_2 \lambda_2}{C_{11}V_2 - C_{44}} \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \dots (1c)$$

ここで, $\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = 0$
 $\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \theta^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = 0$
 $\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \theta^2} + \nu_3 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} = 0$, $\nu_3 = C_{44}/C_{66}$

$$C_{11}C_{44}V_2^2 + (C_{13}^2 + 2C_{13}C_{44} - C_{11}C_{33})V_2 + C_{33}C_{44} = 0, \quad \lambda_\alpha = (C_{11}V_2 - C_{44})/(C_{13} + C_{44}), \quad (\alpha=1, 2)$$

等根の場合: $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\nu_3 = 0$, 相異なる 2 根の場合: $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \frac{C_{11}V_2 - C_{44}}{C_{11}(V_2 - V_1)}$, $\nu_3 = \frac{2V_2}{V_2 - V_1}$

3. 変位ポテンシャル 上式に示した微分方程式を解くと, それぞれの変位ポテンシャルが得られ, そのうち, 軸対称問題に関する変位ポテンシャルは, 次式となる。

$$\phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n z D_n I_0(\sqrt{\nu_1} \beta_n r), \quad \phi_3 = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_2 r) A_n \cosh \lambda_2 z / \sqrt{\nu_2}, \quad \phi_{1,0} = F_0(r^2/2 - z^2/\nu_2) \dots (2a)$$

$$\phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos \beta_n z I_0(\sqrt{\nu_2} \beta_n r), \quad \phi_3 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_2 r) \cosh \lambda_2 z / \sqrt{\nu_1}, \quad \phi_{3,0} = C_0(r^2/2 - z^2/\nu_1) \dots (2b)$$

ここで, $\beta_n = n\pi/h$ ($n=1, 2, \dots$), $\lambda_s = \lambda_s/a$ ($s=1, 2, \dots$)

但し, 上式に示した変位ポテンシャルは, 応力状態が $z=0$ に関して対称な場合に限定したものである。

式 (2a) 及び式 (2b) を式 (1a) 及び式 (1c) に代入すると, 変位成分の式及び一般化した Hooke の法則から応力成分の式が得られる。

4. 境界条件 図-1 に示した上, 下対称の帯状圧力を受けた有限円柱の境界条件は, 次式となる。

$$r=a \text{ において, } \sigma_{rr} = -p(z), \quad \sigma_{rz} = 0 \dots (3a, b)$$

$$z=\pm h \text{ において, } \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \dots (3c, d)$$

ここで,
$$p(z) = \begin{cases} q & [-d < z < d] \\ 0 & [\text{上記以外の場合}] \end{cases}$$

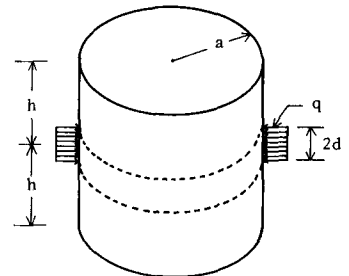


図-1 帯状圧力を受ける有限円柱

5. 数値計算例 計算例として、円柱の高さ h と半径 a との比 $h/a = 1.0$ 及び圧力分布幅 d と高さ h との比 $d/h = 0.3$ の短円柱を取り扱った。図-2から図-4には、級数の項数を n 及び m について、それぞれ、38項取ったときの Magnesium 体に関する σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ 及び σ_{zz} の応力分布を示した。また、図-5には、種々の横等方性体及び等方性体 ($\nu=0.25$) に関する $\sigma_{\theta\theta}$ の値の比較を示した。なお、Magnesium, Cadmium 及び E-glass epoxy の弾性定数は、それぞれ、物理的に求められている通常の値を用いた。

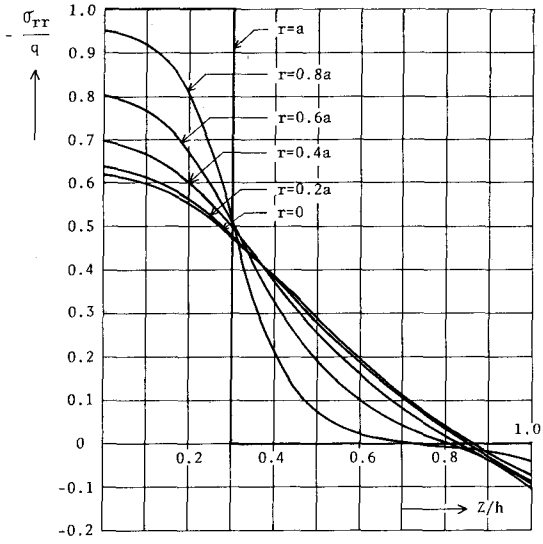


図-2 σ_{rr} の分布 (Magnesium)

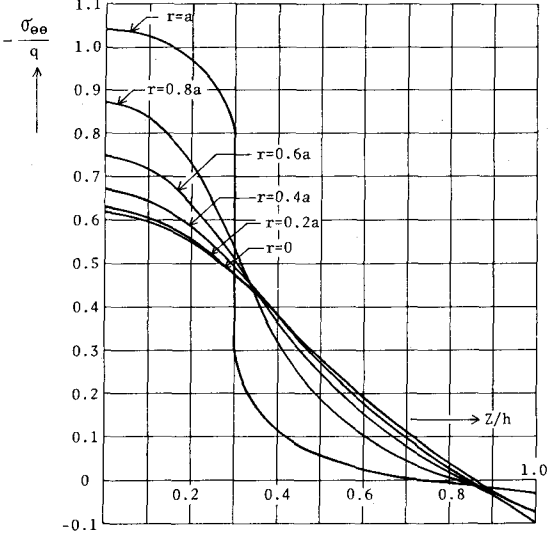


図-3 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布 (Magnesium)

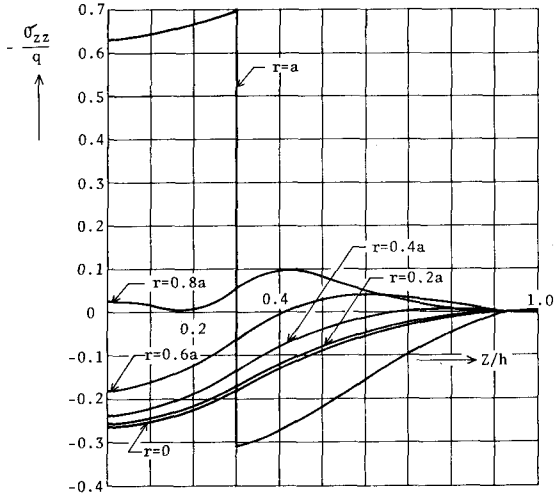


図-4 σ_{zz} の分布 (Magnesium)

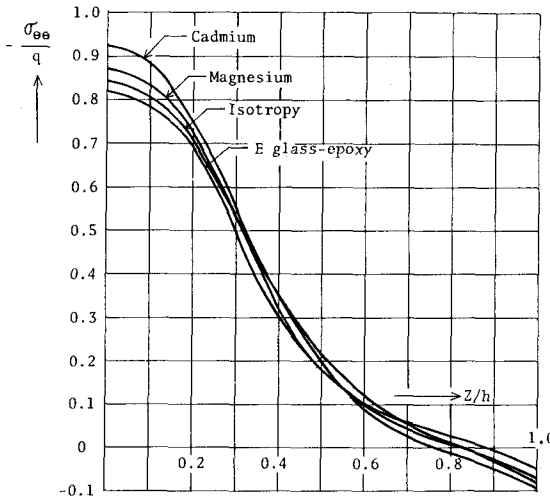


図-5 種々の横等方性材料における $\sigma_{\theta\theta}$ の比較 ($r=0.8a$)

6. あとがき 従来の横等方性体に関する研究では、等方性体と比較する場合においても、等方性体は、別個に解析しなければならなかったが、本研究の解を用いれば、横等方性体に関する計算プログラムから、単なるデータ交換のみで、等方性体の数値結果を直接得ることができ、相当広く応用し得る1つの有効な解と考える。