

金沢大学 大学院 学生員 太田良二
 金沢大学 工学部 正 員 小堀為雄
 金沢大学 工学部 正 員 近田康夫

1. はじめに

有限要素法を用いて非軸対称荷重下の軸対称体を解析する場合、Fourier 級数を用いた半解析的手法¹⁾によるのが一般的で、杭-地盤系などの解析においてしばしば用いられる。この場合、杭-地盤間の境界面では剥離や活動が発生するが、これを表現するために、筆者らはGoodman のジョイント要素²⁾を拡張して非軸対称荷重に対応可能な軸対称ジョイント要素を提案した³⁾。文献3)では、直接的な導出を行ったが、本報告では、一般的な4節点アイソパラメトリック要素の定式化に沿った導出方法を示し、若干の考察を加える。

2. アイソパラメトリック要素からの定式化

簡単のため、非軸対称荷重が、円筒座標系 (r, z, θ) において、 $\theta = 0$ 断面に関して対称な場合を考える。

図1のような4節点アイソパラメトリック要素を考えれば、形状関数 N_i は、次式のようなのである。

$$N_i = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)/4 \quad (1)$$

また、Fourier 級数を用いた半解析的手法では、節点変位は、採用する級数項の数を M として、次式のように表せる。

$$u_i = u_i^0 + \sum_{m=1}^M u_i^m \cdot \cos(m\theta), \quad v_i = v_i^0 + \sum_{m=1}^M v_i^m \cdot \cos(m\theta), \quad w_i = w_i^0 + \sum_{m=1}^M w_i^m \cdot \sin(m\theta) \quad (2)$$

いま、応力-ひずみマトリックス D を次式のように与える。

$$D = \text{diag} [2ak_r \quad 2bk_\eta \quad 2Rk_\xi \quad 2bk_\xi \quad 2bk_\theta \quad 2bk_\theta] \quad (3)$$

要素剛性マトリックス K^e の部分マトリックス K_{ij}^{mm} は、

$$K_{ij}^{mm} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B_i^m)^T D B_j^m r |J| d\xi d\eta d\theta, \quad |J| = ab$$

ただし、 $B_i^m =$

$$\begin{bmatrix} \frac{2N_i}{2r} \cos(m\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2N_i}{2z} \cos(m\theta) & 0 \\ \frac{N_i}{r} \cos(m\theta) & 0 & \frac{m}{r} N_i \cos(m\theta) \\ \frac{2N_i}{2z} \cos(m\theta) & \frac{2N_i}{2r} \cos(m\theta) & 0 \\ -\frac{m}{r} N_i \sin(m\theta) & 0 & (\frac{2N_i}{2r} - \frac{N_i}{r}) \sin(m\theta) \\ 0 & -\frac{m}{r} N_i \sin(m\theta) & \frac{2N_i}{2z} \sin(m\theta) \end{bmatrix} \quad (4)$$

要素中心で評価した要素剛性マトリックスの成分は、

$$\left. \begin{aligned} K_{3i-2,3j-2}^e &= \frac{\lambda m}{8} \left[\frac{k_r}{a} C_i C_j + \frac{\pi}{R} k_t + \frac{b}{R} k_\xi D_i D_j + \frac{mb}{R^2} k_\theta \right] \\ K_{3i-2,3j-1}^e &= \frac{\lambda m}{8} \left[\frac{1}{a} k_\xi C_i D_j \right] \\ K_{3i-2,3j}^e &= \frac{\lambda m}{8} \left[\frac{m\pi}{R} k_t - \frac{mb}{R^2} k_\theta \left(\frac{1}{a} C_j - 1 \right) \right] \\ K_{3i-1,3j-1}^e &= \frac{\lambda m}{8} \left[\frac{1}{b} k_\eta D_i D_j + \frac{b}{a} k_\xi C_i C_j + bk_\theta \left(\frac{m}{R} \right)^2 \right] \\ K_{3i-1,3j}^e &= -\frac{\lambda m}{8} \frac{bm}{4R} D_j \\ K_{3i,3j}^e &= \frac{\lambda m}{8} \left[\pi k_t \frac{m^2}{R} + \frac{4b}{R^2} k_\theta \left(\frac{1}{a} C_i - 1 \right) + \frac{1}{b} k_\theta D_i D_j \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$K_{i,j}^e$: K^e の (i, j) 成分, $i, j = 1, 2, 3, 4$

となる。ただし、 $\lambda m = 4\pi abR$ ($m \geq 1$)、 $\lambda m = 8\pi abR$ ($m = 0$)、であり、 C_i, D_i は $i, j = 1 \sim 4$ に対応して、 $C_i = -1, 1, 1, -1, D_i = -1, -1, 1, 1$ なる値をとる。

ここで、要素の厚み $2b$ を 0 とすると、結局 K^e は式(6)のようになり、直接的導出の結果³⁾に一致する。また、この剛性マトリックスの θ 軸に関する行と列を取り除けば、Heuze ら⁴⁾が導いた軸対称ジョイント要素

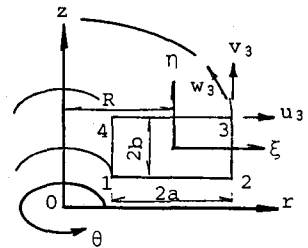


Fig.1 4-nodes iso-parametric element

に一致する。

$$K^{\theta} = \begin{bmatrix} k & k & -k & -k \\ & k & -k & -k \\ \text{SYM.} & & k & k \\ & & & k \end{bmatrix}, \quad k = \text{diag}[k_{\xi} \quad k_{\eta} \quad k_{\theta}] \quad (6)$$

ここで、提示した軸対称ジョイント要素は、例えば、Fourier 次数: $m=1$ に対して、図2に示すような変形モードをもつ。

さて、解析手順は、以下のようになる。

(1) Fourier 次数ごとに平衡方程式を解いて未知変位の Fourier 成分を求め、これに対応した応力を算出して Fourier 合成することにより特定の θ 断面における応力を得る。幾つかの θ 断面について同様にして3次元解を得る。(2) 応力を求めた θ 断面においてジョイント要素に剥離や滑動が生じたかどうかを判定する。ジョイント要素は、法線方向には引っ張り強度をもたず、滑動に関しては Mohr-Coulomb の降伏基準に従うものとする。(3) 剥離や滑動が生じた場合には、それに対応して応力を解放し、応力伝達法⁵⁾に従って収束計算を行う。収束は、解放応力に対応した節点力のノルムが、作用荷重のノルムの何%になったかをもって判定する。

ジョイント要素の中心における応力の m 次調和成分は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^m &= \frac{k_r}{2} (-u_1^m + u_2^m + u_3^m - u_4^m) \cdot \cos(m\theta) \\ \sigma_z^m &= \frac{k_z}{2} (-v_1^m - v_2^m + v_3^m + v_4^m) \cdot \cos(m\theta) \\ \sigma_{\theta}^m &= 2\pi k_t \frac{1}{4} \{ u_1^m + u_2^m + u_3^m + u_4^m + m(-v_1^m + v_2^m + v_3^m - v_4^m) \} \cdot \cos(m\theta) \\ \tau_{rz}^m &= \frac{k_{rz}}{2} (-u_1^m - u_2^m + u_3^m + u_4^m) \cdot \cos(m\theta) \\ \tau_{r\theta}^m &= 0 \\ \tau_{z\theta}^m &= \frac{k_{z\theta}}{2} (-w_1^m - w_2^m + w_3^m + w_4^m) \cdot \sin(m\theta) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

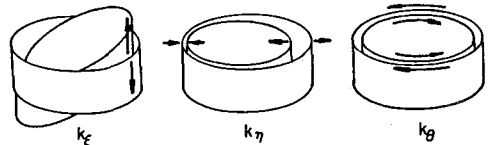


Fig.2 Schematic of modes of deformation at the interface ($m=1$)

これらの応力成分に対応した等価節点力は、

$$\sigma_m = \{ \sigma_r \quad \sigma_z \quad \sigma_{\theta} \quad \tau_{rz} \quad \tau_{r\theta} \quad \tau_{z\theta} \}^T$$

$$f_i^m = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \{ B_i^m \}^T \sigma_m r |J| d\xi d\theta, \quad f_i^m = \{ f_{r1}^m \quad f_{z1}^m \quad f_{\theta1}^m \}^T \quad (8)$$

より、

$$\left. \begin{aligned} f_{r1}^m &= \left\{ \frac{\pi}{2\pi} \right\} \frac{2\pi R}{2} (-\tau_{rz}) = f_{r2}^m = -f_{r3}^m = -f_{r4}^m \\ f_{z1}^m &= \left\{ \frac{\pi}{2\pi} \right\} \frac{2\pi R}{2} (-\sigma_z) = f_{z2}^m = -f_{z3}^m = -f_{z4}^m \\ f_{\theta1}^m &= \left\{ \frac{\pi}{2\pi} \right\} \frac{2\pi R}{2} (-\tau_{z\theta}) = f_{\theta2}^m = -f_{\theta3}^m = -f_{\theta4}^m, \quad \left\{ \frac{\pi}{2\pi} \right\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2\pi} & (m \geq 1) \\ 0 & (m = 0) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となり、応力成分は、 σ_z 、 τ_{rz} 、 $\tau_{z\theta}$ の3成分のみが物理的な意味をもつことになる。

4. 結言

文献2)では、直接的な導出を行った軸対称ジョイント要素を、一般的な4節点アイソパラメトリック要素の定式化に沿って導出方法し、要素内応力の物理的な意味を考察した。この軸対称ジョイント要素の適用例としては、本年次学術講演会の別記発表⁶⁾を参照されたい。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C. : The finite element method, 3rd ed., Chap.15, McGraw-Hill, 1977
- 2) Goodman, R.E. et al : Proc. of ASCE, VOL.95, SM3, pp.637-659, 1968.
- 3) 小堀, 近田: 構造工学論文集, Vol.31A, pp.245-250, 1985.3.
- 4) Heuze, F.E. et al : Proc. of ASCE, VOL.108, GT5, PP.757-776, 1980.
- 5) Zienkiewicz, O.C. et al : Geotechnique, VOL.18, pp.56-66, 1968.
- 6) 小堀, 近田: 剥離, 滑動を考慮した杭頭結合部の有限要素解析, 第40回年次学術講演会概要集