

電力中央研究所 正会員 中村 秀治
電力中央研究所 正会員 松浦 真一

1. まえがき

大規模な構造解析を短時間で行うために、パイプライン化をはかり、ベクトル演算を特に高速化したのが現在のスーパーコンピュータである。一方、画像処理のように、互いに相関関係の少ない多数の演算を効率良く行うためには、並列処理が有効であり、その一つがデータフロー型のコンピュータである。この種のコンピュータは、ごく最近実用化されつつあるが、従来の有限要素解析プログラムではその利点が十分に生かされない。本文では、静的解析に限定して有限要素解析において並列処理演算機能を有効利用するために、通常用いられているソルバーとは異なる陽解法の逐次積分法に基づくアルゴリズムを検討した結果を示す。

2. 並列処理演算機能を有効利用するための基本的考え方

全体構造系のマトリックスの逆行列演算を含む場合、並列処理演算機能の有効利用は難しい。SOR法、CG法に代表される反復法では、途中のマトリックス演算の一部に並列処理が適用可能であるが、全体として著しく計算効率が高まるとは考えられない。並列処理演算機能を有効利用するためには同一ステージで各格点未知量の計算が独立に行える必要があり、陽解法が適している。

陽解法を用いる場合、静的問題を動的問題に置換して解くことが考えられる。次の運動方程式

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \quad (\text{一定}) \quad (\text{但し, } M, C, K \text{ は 質量, 減衰, 剛性マトリックス}) \quad \text{----- (1)}$$

において、 M を対角マトリックスとすれば、 $\ddot{U}$ 、 $\dot{U}$ を多段式で置換することにより無数の陽な逐次積分スキーム

$$U_{n+1} = f(U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, \dots, \dot{U}_n, \dot{U}_{n-1}, \dots, \ddot{U}_n, \ddot{U}_{n-1}, \dots; F_n, F_{n-1}, \dots) \quad \text{----- (2)}$$

が導かれる。例えば、 $C=0$ として、 $\ddot{U}$ を中央差分で近似すれば

$$U_{n+1} = (2 - M^{-1}K\Delta t^2)U_n - U_{n-1} + M^{-1}\Delta t^2 F_n \quad (\text{但し, } \Delta t \text{ は 時間きざみ}) \quad \text{----- (3)}$$

となる。

しかしながら、陽解法においては無条件安定にすることが不可能であり、安定な解が得られる場合は精度が良くて振動が止まらず、他の場合は発散する。従って、式(2)により適当に振動が減衰して正解に収束するようなスキームを見出すことは不可能である。

そこで、次の1階の方程式を考える。ここで、 H は任意の正定値、対角マトリックスとする。

$$H\dot{U} + KU = F \quad (\text{一定}) \quad \text{----- (4)}$$

この解は

$$U = e^{At} + e^{At} \int_0^t e^{-As} H^{-1} F ds \quad (\text{但し, } A = -H^{-1}F) \quad \text{----- (5)}$$

であり、

$$U_{t \rightarrow \infty} = K^{-1}F \quad \text{----- (6)}$$

となる。従って、 U を適当な多段式で置換することにより、陽解法のスキームを見出し、安定な逐次積分を行えば静的解析の解に収束するはずである。

3. 多段式の検討

一般に段数を多くすると精度が向上する反面、安定領域が極めて狭くなるので次の式を考える。

$$b_0 U_{n+1} + b_1 U_n + b_2 U_{n-1} + b_3 U_{n-2} = \Delta t \dot{U}_n + b_4 \dot{U}_{n-1} \quad \text{----- (7)}$$

$b_0, \dots, b_4$ は各々のスキームによって定まる定数であり、打ち切り誤差は Δt^5 まで上げることができるが、 Δt^3 まで下げて b_3, b_4 を自由に選択できるようにする。この場合

$$b_0 = -b_3 - \frac{b_4}{2} + \frac{1}{2}, \quad b_1 = 3b_3 + 2b_4, \quad b_2 = -3b_3 - \frac{3}{2}b_4 - \frac{1}{2} \quad \text{----- (8)}$$

4. 逐次積分法

式(7)を式(4)へ代入すれば

$$U_{n+1} = -\frac{1}{b_0} \{ (b_1 + \Delta t H^T K) U_n + b_2 U_{n-1} + b_3 U_{n-2} - b_4 \Delta t \dot{U}_{n-1} \} + \frac{\Delta t}{b_0} H^T F \quad \text{----- (9)}$$

$$U_{n+1} = -\frac{1}{b_0} \{ (b_1 + \Delta t H^T K) U_n + (b_2 + b_4 \Delta t H^T K) U_{n-1} + b_3 U_{n-2} \} + \frac{\Delta t}{b_0} H^T (F_n + b_4 F_{n-1}) \quad \text{----- (10)}$$

これらは、Hが対角マトリックスであるため、構造系全体のマトリックスを構成した後に計算する必要は無い。各格点について同一ステージであれば別個に計算することができる。安定条件についてはここでは省略する。

5. 数値解析例

図1に示すモデルについて、式(10)を用いて静的解析の解を求めた。HはKの対角成分と同一とし、他の条件は

$$\Delta t = 1.0, \quad b_3 = -0.20, \quad b_4 = -0.40$$

とした。荷重条件、境界条件、材料定数等については図1中に示した通りである。くり返し計算は2650回まで行い格点①における収束状態を図2に示した(初めの650回は、荷重を大きく与えて加速)。また、点①～③、要素④～⑧までのy方向変位とy方向応力を表1に示し、通常の解析法による値と比較した。

		本解析法	通常の有限要素解析
変位	①	$0.632 \times 10^{-5} \text{ cm}$	$0.638 \times 10^{-5} \text{ cm}$
	②	0.446×10^{-5}	0.447×10^{-5}
	③	0.505×10^{-5}	0.512×10^{-5}
応力	④	0.507 kg/cm ²	0.507 kg/cm ²
	⑤	0.447	0.447
	⑥	0.551	0.553
	⑦	2.220	2.252
	⑧	1.677	1.697

表-1 解析結果

6. あとがき

今回の検討は以上の通りであるが、最適な係数 b_3, b_4 の決定、安定条件、収束の加速法など詳細な検討は今後の課題である。いずれにしても従来の解法より多くの計算時間を必要(推定では10倍以下には下らない)とするが、並列処理計算機の適用を前提にすれば、有効な解法となり得る可能性がある。今後の検討結果は当日発表する予定である。

参考文献

- (1) Park, K.C. : An Improved Stiffly Stable Method for Direct Integration of Nonlinear Structural Dynamic Equations, Applied Mechanics Western Conference, held at Univ. of Hawaii, 1975
- (2) 中村秀治、他 : 大次元固有値解析ならびに多段法による非線形動的応答解析法の検討、電研報告 : 380527、昭和56年3月

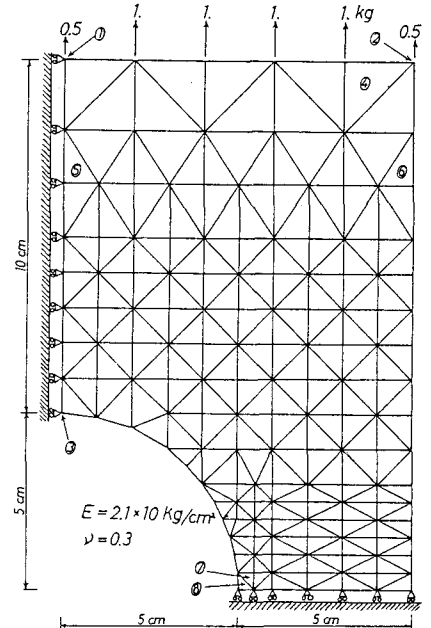


図-1 解析モデル図

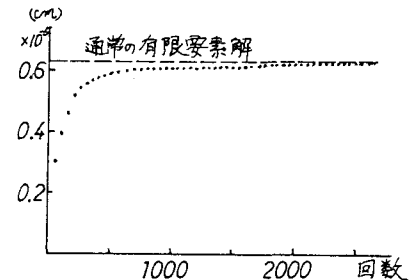


図-2 点①の収束過程