I-9　　修正共役傾斜法による線形方程式の解の収束性に関する研究

岡山大学工学部　正会員　○谷口建男
松尾橋梁(株)　　桜本洋一

1．まえがき

FEM等数値解法においては，大次元疎行列を係数とする連立一次方程式の有効な解法が望まれ，様々な計算法が考察されている。中でも近年注目されているものとして，修正共役傾斜法が挙げられ，演算時間短縮を図る様々な工夫がなされている。共役傾斜法は本来，n元の方程式に対してn回の反復計算で正確に収束するものであるが，係数行列に対し前処理（Preconditioning）を施すことにより，それよりはるかに少い反復回数で良い近似解を得ることができることがわかっている[1]。本報告では，Preconditionerを異えたCG法（PCG法）の収束性に関して理論的考察を行い，Preconditionerの違いの反復回数への影響を数値実験により探る。更に構造計算へのPCG法の導入の可能性に関し考察する。

2．CG法とその収束性の向上策

対称・正定値性を有するn元連立一次方程式

$$A\cdot x = b \tag{1}$$

に対するCG法の一般的なアルゴリズムは次のようなものである。x_0を初期として

Step 1．$r_0 = b - A x_0$　　　Step 2．$p_0 = r_0$

Step 3．$\alpha_k = \dfrac{p_k^t\cdot r_k}{p_k^t A p_k}$　　　Step 4．$x_{k+1} = x_k + \alpha_k\cdot p_k$

Step 5．$r_{k+1} = r_k - \alpha_k\cdot A\cdot p_k$　　　Step 6．$\beta_k = -\dfrac{r_{k+1}^t\cdot A\cdot p_k}{p_k^t A p_k}$

Step 7．$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k\cdot p_k$　　　Step 8．Go To Step 3．

修正共役傾斜法は，解の収束性を向上させるために，上記アルゴリズムにStep 0．を追加してNewton法等により初期値の改良を図る[3]，あるいはStep 2，6，7を次のように改良して反復計算回数の減少を図っている[2,3,4]。

Step 2′．$p_0 = B\cdot r_0$　　Step 6′．$\beta_k = -\dfrac{r_{k+1}^t B A p_k}{p_k^t A p_k}$　　Step 7′．$p_{k+1} = B r_{k+1} + \beta_k\cdot p_k$

特に後者は，単に反復回数の減少のみならず，1回のIterationに要する演算時間の減少にも大いに役立っている。なお，修正アルゴリズム中の行列Bは，次に述べられる行列である。この修正法として，行列Aの行列分離（Matrix Splitting）を利用するものと，行列分解（Matrix Decomposition）するものに大別される。

（a）．行列分離法　　1例を挙げると次のようなものがある[2]。

$$A = L + D + L^t \qquad (L：下三角行列，D：対角行列)$$

とおき，$D^{-1/2}$を両側からかけると

$$A' = L' + I + (L')^t \qquad (I：単位行列)$$

ここで，

$$C = I + \omega L' \qquad (\omega：調整パラメータ)　とおくと$$

$$B = (C\,C^t)^{-1} \tag{2}$$

（b）．行列分解法　　1例としてIncomplete Cholesky Decompositionを示す[6]。　Aをcholesky分解すると

$$A = L\cdot L^t$$

このLの替わりに，例えばAの下三角部の非零要素が存在する要素のみ残した下三角行列を$\tilde{L}$とおくと，Aの近似逆行列として

$$B = (\tilde{L}\cdot\tilde{L}^t)^{-1} \tag{3}$$

$\tilde{L}$として様々な考え方をとることができることは明らかであり，一義的には決まらない。

(2)，(3)式を上記修正アルゴリズムに導入したのが，修正共役傾斜法である。

3. PCG法の反復回数の理論的予測

反復回数予測式の理論的誘導は文献1), 2), 5)を参照されたい。結論のみを示すと、相対誤差をε ($0 \le \varepsilon \le 1$)とすれば、この精度を得るに必要な反復回数の上限 IT は、

$$IT \le INT\left[\frac{1}{2}\sqrt{\sigma}\,\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+1\right] \tag{4}$$

上式中、σは行列の条件数、INT は小数点以下切り捨てをそれぞれ示す。Chandraは Incomplete Cholesky 分解を用いた時、σは $O(n)$で抑えられることを示している[7]。これを用いれば、

$$IT \le INT\left[\frac{1}{2}\sqrt{n}\,\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+1\right] \tag{5}$$

即ち、IT は元数の平方根で抑えられることがわかる。このことは Preconditioner の使用により行列の条件数が改良され、それにより、Iteration 数が減少する。

4. 数値実験

図1に示した5モデルに対し、$1/n$ の等分布荷重を載荷し、EPS $=10^{-7}$までの反復回数を計測した結果を図2〜6に示す。なお、モデルは単位領域を NG1, NG2 に分割したものを用いている。$n = NG1 \times NG2$。いづれも(5)式で示されたように$\sqrt{n}$のオーダーの反復回数で収束していることがわかる。もし $IT = C \cdot INT\left[\frac{1}{2}\sqrt{n}\,\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+1\right]$ と表現すれば、特に、行列分離法では C の幅として3程度であることがわかる。更に、行列分離の方が有効であり、SOR法の加速パラメータと違い、調整パラメータ ω は IT に対して鈍い。これは、利用する立場よりすれば非常に都合が良い。

5. あとがき

四周辺固定板の解析等、拘束条件を有する点数が多い場合、PCG法は有効である。反復回数が$\sqrt{n}$以下のオーダーで抑えられ、従って大次元行列に対して他の反復法と違い非常に有効であると言えよう。なお、本研究推行上御協力戴いた佐賀県方野口幹展氏に感謝致します。

[参考文献] 1). O. Axelsson, Lecture Note in Math., No. 572, Springer 1-51, 1977, 2). 野寺隆, Seminar on Math. Sci., No. 7, Keio Univ., 1983, 3). G. Gambolati, Int. J. Num. Meth. Eng., 15, 661-675 4). M.A. Ajiz & A. Jennings, Int. J. Num. Meth. Eng., 20, 949-966, 1984, 5). 桜本洋一, 岡山大学卒業論文, 1984, 6). J.A. Meijerink et al, J. Comp. Phy., 44, 134-155, 1981, 7). R. Chandra, Res. Rep. No. 129, Yale Univ., 1978

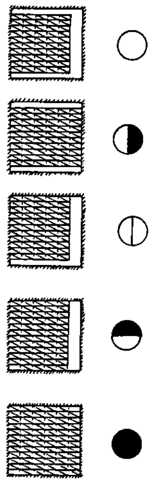

図 1

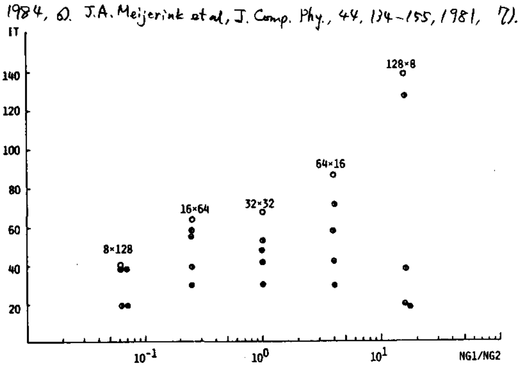

FIG. 2 NG1/NG2 - IT RELATION FOR EPS=10^{-7} (MATRIX DECOMPOSITION)

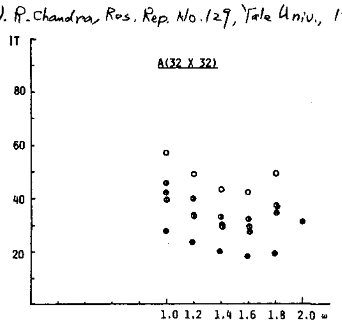

FIG. 3 ω-IT RELATION FOR EPS=10^{-7} (MATRIX SPLITTING)

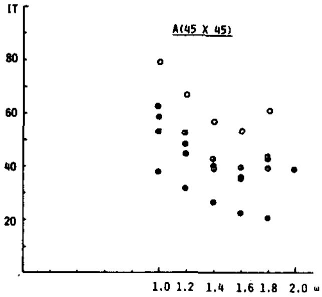

FIG. 4 ω- IT RELATION FOR EPS=10^{-7} (MATRIX SPLITTING)

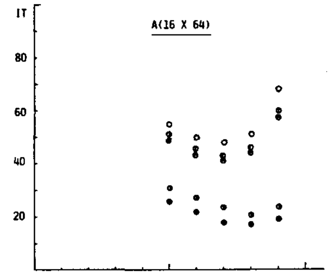

FIG. 5 ω- IT RELATION FOR EPS=10^{-7} (MATRIX SPLITTING)

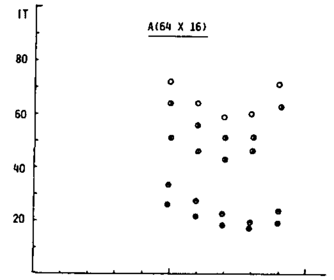

FIG. 6 ω-IT RELATION FOR EPS=10^{-7} (MATRIX SPLITTING)