

鉄建建設(株) 正員 ○佐々木 一寿
 岩手大学工学部 正員 宮本 裕
 岩手大学工学部 正員 岩崎 正二

1. まえがき

近年、積分方程式と有限要素法で行なわれる離散化法を組み合わせた境界要素法(Boundary Element Method, 以下B.E.Mと略す)と呼ばれる解析方法が、マイコンの発達とともに工学的問題に適用されるに始めている。そこで本報告においては、すでに文献(4)で述べている要素関数 u, p が線形であるとした場合の解析方法をもとに、より汎用性のあるものにするために工学上しばしば重要となる自重、遠心力および定常熱応力などの物体力を考慮した場合の解析方法について述べ、その結果とF.E.Mを用いた複合構造解析システム(ISAP-6)で得られた結果との比較・検討を行なうことを目的としている。

2. 物体力を考慮した場合の境界要素法の基礎概念

二次元弾性問題におけるB.E.Mの基礎関係式は次式で示される。

$$C^i u_\ell^i + \int_\Gamma U_R P_{\ell R}^* d\Gamma = \int_\Gamma P_R U_{\ell R}^* d\Gamma + \int_\Omega b_R U_{\ell R}^* d\Omega \quad (R = 1, 2 \quad \ell = 1, 2) \quad (1)$$

ここで U_R, P_R および b_R は、それぞれ R 方向の変位、応力度および物体力。 u_ℓ^i は点 i における ℓ 方向の変位。 C^i は点 i における境界の形状を示す係数である。また $U_{\ell R}^*, P_{\ell R}^*$ はそれぞれ ℓ 方向に作用する単位力により生じた R 方向の変位と応力ベクトルである。これは基本解と呼ばれるもので次式で示される。

$$U_{\ell R}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \Delta_{\ell R} + \frac{\partial r}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_R} \right\} \quad (2)$$

$$P_{\ell R}^* = -\frac{1}{4\pi G(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \Delta_{\ell R} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_R} \frac{\partial r}{\partial x_\ell} \right] - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_\ell} n_R - \frac{\partial r}{\partial x_R} n_\ell \right) \right\} \quad (3)$$

ただし、 n は物体表面の法線、 n_R は方向余弦、 $\Delta_{\ell R}$ はKroneckerのデルタ、 r は負荷点と考慮点との距離、 ν はポアソン比、 G はせん断弾性係数である。

ここで式(1)をマトリックスを用いて表わすと式(4)になる。ただし、 $[u^*]$ は $U_{\ell R}^*$ を成分としてもつ (2×2) のマトリックス、 $[p^*]$ も同様である。

$$[C^i] \{u^i\} + \int_\Gamma [p^*] \{u\} d\Gamma = \int_\Gamma [u^*] \{p\} d\Gamma + \int_\Omega [u^*] \{b\} d\Omega \quad (4)$$

さらに $\{u\}$ と $\{p\}$ は線形要素を仮定した場合 $\{u\} = [\Phi]^T \{u_s\}$, $\{p\} = [\Phi]^T \{p_s\}$ と表わされる。なお $[\Phi]^T$ は内そう関数と呼ばれるもので一定要素の場合は不用である。そこで以上の点を考慮して式(4)を n 個の線形要素について考えると次式のようなになる。

$$[C^i] \{u^i\} + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_j} [p^*] [\Phi]^T d\Gamma \right\} \{u_s\} = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_j} [u^*] [\Phi]^T d\Gamma \right\} \{p_s\} + \sum_{s=1}^m \left\{ \int_{\Omega_s} [u^*] \{b\} d\Omega \right\} \quad (5)$$

式(5)にGaussの数値積分公式を用いて展開すると式(6)となる。なお実際の数値積分では、境界においてGaussの4点積分公式、内部領域においてはGaussの三角形要素における5次7点積分公式を用いた。

$$[C^i] \{u^i\} + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^4 |G|_k \omega_k ([p^*] [\Phi]^T)_k \right\} \{u_s\} = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^4 |G|_k \omega_k ([u^*] [\Phi]^T)_k \right\} \{p_s\} + \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{t=1}^5 |J|_t \omega_t ([u^*] \{b\})_t \right\} \quad (6)$$

ここで $|G|_s = \sqrt{A_s}/2$, l_s は要素 T_s の長さ, $|J|_s$ は要素 Ω_s の面積である。また m は領域 Ω を三角要素に分割した際の分割数, n および e は積分点の個数, ω_R, ω_e は積分点での重み, $([P^*][\Phi]^T)_R, ([U^*][\Phi]^T)_R$ および $([U^*][b])_e$ は積分点におけるそれぞれの関数値である。

さらに式(6)はある特定な点 i (考慮点) と, その他の要素 T_s との関係式であるので, 式(6)を全ての節点 n について考えると結局 $2n$ 個の方程式が得られる。よって式(6)は次式のように表わされる。

$${}^{2n}[H][U] = {}^{2n}[G]\{P\} + \{B\} \quad (7)$$

3. 数値計算例

(1). 一様な棒が下方に等分布荷重を受ける場合

Fig. 1 のようなモデルを考え, ISAP-6 と比較する。

(諸元)

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, G = 8.0769 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, \nu = 0.23077$$

$$\rho (\text{単位体積重量}) = 0.00785 \text{ kg/cm}^3, L = 150 \text{ cm}, B = 60 \text{ cm}$$

(2). 擁壁が三角形分布荷重を受ける場合

Fig. 2 のような擁壁に本手法を適用し, ISAP-6 と比較する。

(諸元)

$$E = 2.079 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, G = 9.45 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2, \nu = 0.1$$

$$\rho = 0.0024 \text{ kg/cm}^3, L = 180 \text{ cm}, B = 60 \text{ cm}$$

4. 結果

(1). 一様な棒が下方に等分布荷重を受ける場合

要素 節点		ISAP-6	B.E.M	
			constant ele.	linear ele.
1	X-変位	-0.7106×10^{-3}	-0.7148×10^{-3}	-0.7147×10^{-3}
	Y-変位	—	—	—
2	X-変位	-0.4272×10^{-3}	-0.4290×10^{-3}	-0.4282×10^{-3}
	Y-変位	0.3844×10^{-3}	0.4403×10^{-3}	0.4332×10^{-3}
3	σ_{xx}	-0.13143	-0.59366	-0.29542
	σ_{yy}	0.1012×10^{-3}	0.9943×10^{-3}	0.1007×10^{-3}

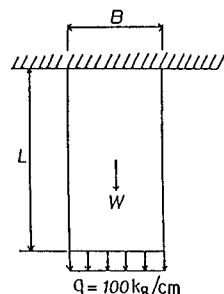


Fig. 1. STICK

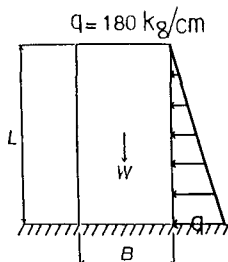


Fig. 2. RETAINING WALL

(2). 擁壁の場合

変位 ($\times 10^{-3}$)	ISAP-6	B.E.M (線形)
1	X 変位 -0.44856	-0.45650
	Y 変位 0.16271	0.16259
2	X 変位 -1.09000	-1.08643
	Y 変位 0.15952	0.15457
3	X 変位 -1.73980	-1.72171
	Y 変位 0.14283	0.13671
4	X 変位 -0.75661	-0.75875
	Y 変位 -0.44161	-0.43838

応力	ISAP-6	B.E.M (線形)
1	σ_{xx} 0.21405	0.06003
	σ_{yy} -1.92640	-1.91257
2	σ_{xx} -0.08977	-0.08696
	σ_{yy} -0.80796	-0.71832
3	σ_{xx} -0.04709	-0.03024
	σ_{yy} 0.42385	0.66571

(単位 ; 変位 cm, 応力 kg/cm^2)

参考文献

- 1) C.A. ブレビス; 境界要素法入門, 培風館 (1982)
- 2) C.A. ブレビス; 境界要素法の応用・2, 企画センター (1983)
- 3) 榎園正人; マイコンによる境界要素解析, 培風館 (1984)
- 4) 佐々木一寿・宮本裕・岩崎正二; 境界要素法による二次元弾性問題の解法, 岩手大学工学部研究報告 第 37 卷 (1984)