

名古屋工業大学 正員 杉本 孝博
名古屋工業大学 正員 長谷部宣男

1. まえがき 縦せん断問題において固定辺隅角部が丸味を有するとき、その隅角部先端に生じる応力集中の法則を考察する。平面弾性問題および薄板の曲げ問題に関してはすでに発表している。固定辺に対するこれらの問題は実用的には構造的な固定辺の応力集中の他、異種材料（一方が剛体場合）の接合部や弾性体中の剛な介在物などにおける応力集中等に適用できる。

隅角部近傍に注目したとき、任意の応力状態は隅角部2等分線に対称な応力状態と通対称な応力状態に分けられるが、ここでは対称なものを取り上げる。解析には有理写像関数および複素応力関数を用い、これによる応力分布の例も示す。また縦せん断問題では弾性体が直交異方性である場合の解析も可能であるため⁴⁾、この場合の解析および考察も行なう。

2. 解析モデルと応力分布 先端に丸味のある切欠きを有する半無限板を考える。境界はすべて固定し、無限遠において一様な縦せん断荷重 T_0 を作用させる。Fig. 1, 2は以上のような解析モデルとその応力分布の1例を示したものである。Fig. 1の応力分布は等方性の場合のもので、形状は隅角部角度 $2\alpha\pi=315^\circ$ 、切欠き底の曲率半径 $\rho/a=-0.1698$ のものである。境界線上および y 軸上の縦せん断応力を示す。境界線上では $T_{\theta t}$ （境界線に直交な面上の縦せん断応力）はゼロであり、これは理論的にも導びかれる。また切欠き先端において T_{rx} （境界面上の縦せん断応力）による応力集中が生じている。 y 軸上においては $T_{\theta t}$ は対称性よりゼロとなる。

Fig. 2は直交する主せん断弾性係数 G_{13} , G_{23} の方向がそれぞれ x と y 面に平行な直交異方性であるような場合の応力分布である。切欠き形状は $2\alpha\pi=315^\circ$ 、 $\rho/a=-0.0901$ である。また $G_{13}/G_{23}=0.029$ である。この場合も切欠き先端において T_{rx} が最大になり、これによる応力集中が生じている。 y 軸上では $T_{\theta t}$ はゼロであるが、境界上では等方性の場合とは異なり $T_{\theta t}$ はゼロとはならない。また T_{rx} , $T_{\theta t}$ の値は $x_1=x$, $y_1=\sqrt{G_{13}/G_{23}} \cdot y$ なるアフィン変換を行な、て得られる形状に対する等方性の場合の縦せん断応力 $T_{x_1 t_1}$, $T_{y_1 t_1}$ と $T_{rx}=\sqrt{G_{13}/G_{23}} \cdot T_{x_1 t_1}$, $T_{\theta t}=\sqrt{G_{13}/G_{23}} \cdot T_{y_1 t_1}$ なる関係があることが理論的にも導びかれる。

3. 固定辺上の応力集中 先端に丸味のない鋭い角を持つ弾性領域において隅角部付近の境界が固定されているとき、隅角部の角度 $2\alpha\pi$ と隅角部近傍における応力のオーダー m_j との関係は、自由境界の場合と同様な手法により、

$$m_j = (2j-1)/2\alpha - 1 \quad (j=1, 2, \dots) \quad (1)$$

となる。これらの m_j を用いて隅角部近傍（ $r < 1$ ）の縦せん断応力は次のように表わされる。

$$\tau = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j r^{m_j} \quad (2)$$

ここに r は隅角部先端からの距離、 α_j は弾性体の形状や境界条件、 m_j 、隅角部2等分線からの角度から決まる定数である。

Fig. 3に解析モデルの切欠き先端に生じている最大応力 τ_{max} と切欠き先端の曲率半径 ρ との関係を4つの隅角部角度に対して面対数グラフ上に示す。

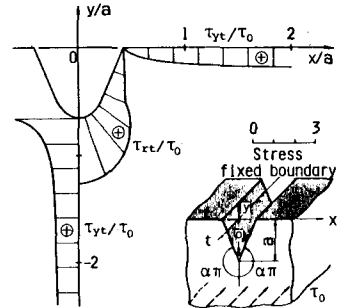


Fig. 1. 解析モデルと応力分布例
($2\alpha\pi=315^\circ$, $\rho/a=-0.1698$)

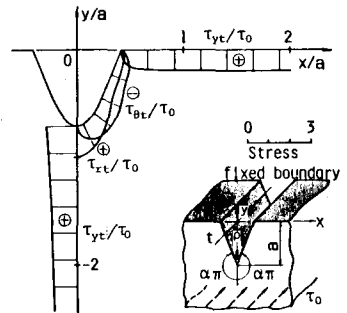


Fig. 2. 解析モデルと応力分布例
($2\alpha\pi=315^\circ$, $\rho/a=-0.0901$,
直交異方性, $G_{13}/G_{23}=0.029$)

この図より T_{max} が各角度で ρ の比較的小さいところでは直線的な変化をし、この直線の勾配が式1より求まる m_i にほぼ一致していることがわかる。これより先端に丸味を有する隅角部における T_{max} と ρ との間にも式2と同様な関係が成り立つと思われる。すなわち、

$$T_{max} = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \rho^{m_j} \quad (3)$$

ここに k_j は弾性体形状、境界条件、 m_j によって決まる定数である。またこの式も式2と同様に $\rho < 1$ の範囲で成り立つものである。

次に式3の始めの2、3項を採った式

$$T_{max}/T_0 = k_1(\rho/a)^{m_1} + k_2(\rho/a)^{m_2} \quad (4)$$

$$T_{max}/T_0 = k_1(\rho/a)^{m_1} + k_2(\rho/a)^{m_2} + k_3(\rho/a)^{m_3} \quad (5)$$

によってFig. 3の各曲線が精度よく表示されることを示す。Table 1に各角度における m_j ($j=1\sim3$)の値と、解析によって得られた T_{max}/T_0 、 ρ/a の値を用いて最小2乗法によって決められた係数 k_j ($j=1\sim3$)の値を示す。またこれらの値を用いて式4,5によって得られた T_{max}/T_0 の値とその誤差をTable 2に示す。これらの精度は全体的によい。2項だけを採った式4でも最大誤差は1.5%程度であり、他はすべて1%以内に収まっている。また3項を採った式5では誤差はすべて1%以内に収まっている。

次に直交異方性の場合について考察する。アフィン変換して得られた形状に対する等方性の場合の最大応力 T_{max1} はアフィン変換して得られた隅角部角度 2α によって式1から得られる応力のオーダー ρ と曲率半径 ρ を用いて式3より

$$T_{max1} = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \rho^{m_j} \quad (6)$$

と書ける。さらに $T_{y1} = T_{y11}$ 、 $P = G_{13}/G_{23} \rho^{(2)}$ であるので結局、直交異方性の場合の最大応力 T_{max} はアフィン変換して得られる形状の k_j と応力のオーダー ρ を用いて

$$T_{max} = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \{ (G_{23}/G_{13}) \rho \}^{m_j} \quad (7)$$

と書けることがわかる。

4. あとがき 固定辺隅角部先端における最大応力は隅角部角度によって決まる応力のオーダー m_j と曲率半径 ρ を用いて式3のように書ける。また実用的にはこの式の始めの教項を採った式でも十分良い精度で最大応力が近似できることがわかった。また直交異方性の場合にはアフィン変換によって得られた形状の k_j 、 ρ_j がわかっているれば式7によって最大応力が得られる。

〈参考文献〉 1. 杉本、長谷部：昭和58年度土木学会中部支部概要集、I-12、PP24-25。
2. 杉本、長谷部：昭和59年度土木学会中部支部概要集、I-5、PP10-11。
3. 杉本、長谷部：土木学会年講概要集、I-107、PP213-214、1984。
4. 長谷部宣男：土木学会論文報告集、第211号、PP11-18、1973。
5. G. C. Sih : Jour. App. Mech., PP51-58、1965-3。

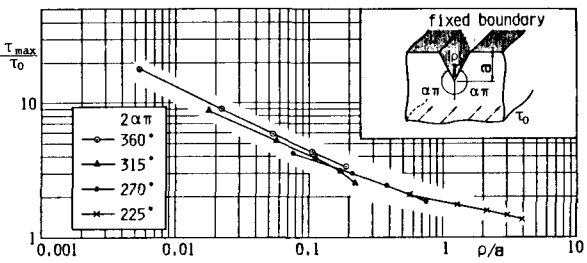


Fig. 3. 最大応力 T_{max} と曲率半径 ρ との関係

Table 1. 応力のオーダーと最小2乗法によって得られた式4,5の係数の値

2α	m_1	m_2	m_3	k_1/T_0	k_2/T_0	k_3/T_0
360°	-0.5	0.5	1.5	1.3307	0.7639	
				1.3317	0.6649	0.6381
315°	-0.4286	0.7143	1.8571	1.5791	-1.4026	
				1.5720	-0.9820	-2.5714
270°	-0.3333	1.0	2.3333	1.8046	-0.1728	
				1.8039	-0.1618	-0.0169
225°	-0.2	1.4	3.0	1.8343	-0.0050	
				1.8351	-0.0057	0.0001

Table 2. 解析による最大応力と式4,5によって得られた最大応力およびその誤差

2 α	ρ/a	T_{max}/T_0 (1)	T_{max}/T_0 of Eq. 4 (2)	Error (1)-(2) (1)-100	T_{max}/T_0 of Eq. 5 (3)	Error (1)-(3) (1)-100
360°	0.00550	18.020	18.004	0.09%	18.010	0.06%
	0.02239	8.970	9.007	-0.41	9.001	-0.35
	0.05397	5.902	5.906	-0.07	5.895	0.12
	0.10597	4.343	4.337	0.14	4.329	0.32
	0.19089	3.386	3.380	0.18	3.392	-0.18
315°	0.01799	8.748	8.757	-0.10	8.740	0.09
	0.05752	5.183	5.187	-0.08	5.205	-0.42
	0.11109	3.787	3.757	0.79	3.784	0.08
	0.16978	3.069	2.981	0.93	2.989	0.66
	0.22164	2.496	2.534	-1.52	2.527	-0.44
270°	0.07821	4.246	4.243	0.07	4.242	0.09
	0.20860	2.995	3.002	-0.21	3.002	-0.23
	0.37933	2.429	2.422	0.08	2.429	0.00
	0.54965	2.084	2.078	0.29	2.079	0.24
	0.76241	1.840	1.844	-0.22	1.842	-0.11
225°	0.55862	2.061	2.059	0.10	2.059	0.10
	1.30134	1.731	1.733	-0.12	1.733	-0.12
	2.15843	1.559	1.559	0.00	1.559	0.00
	3.08067	1.444	1.443	0.07	1.442	0.14
	3.99177	1.356	1.356	0.00	1.357	-0.07