I-4　境界要素法の移動境界問題への適用

信州大学工学部　正会員　○　大上　俊之
同　　上　正会員　　草間　孝志
同　　上　正会員　　三井　康司

1．まえがき

構造物の最適形状決定問題，自由表面流問題，融解・凍結問題等，境界の幾何形状が変化する問題に対しては，領域型の解法である有限要素法よりも，境界上の離散化のみですむ境界要素法の方が有利な手法であると考えられる。

このような移動境界問題に境界要素法を適用する場合，従来は，変数として境界表面上の座標値がとられている。[1)-3)] しかしながら，境界の幾何形状を精度よく表現するには節点を多くとる必要があり，変数が境界表面上の節点の座標値のみとはいえ，節点を多くとれば未定変数も大となり，最適化計算の効率が低下する。この点を解決する手段として境界形状を多項式で近似する方法[4,5)]もあるが，その場合，形状はかなり厳しく規定され，最適な境界形状はそのような制約の中での解ということになる。

本研究は，境界表面の形状を有限複素フーリェ級数で表し，境界形状最適化の変数として複素フーリェ係数をとることによって，最適化計算の効率の向上を図ろうとするものである。

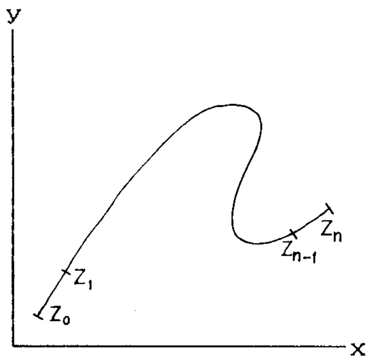
2．有限複素フーリェ級数による境界形状の表現

境界の形状を表す平面を複素平面にとり，それを規定している各線分の端点を複素数列 z_j $(j=0,1,2,\cdots,n)$ で表すと（図－1），節点 j の座標値は

$$z_j = x_j + i\,y_j \qquad (1)$$

となる。ここに，$i=\sqrt{(-1)}$ である。いま，各線分を表すベクトルとして，次のようなベクトル w_j を定義する。

$$w_j = z_{j+1} - z_j \qquad (j=0,1,2,3,\cdots,n-1) \qquad (2)$$



図－1

上坂はwを「かたちの不変表現」とよんでいる。[6)] wのフーリェ変換を C_k とし，逆変換を w_j とすると，式(3)，(4) を得る。

$$C_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} w_j\,\phi_{kj} \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1) \quad (3), \qquad w_j = \sum_{k=0}^{n-1} C_k\,\phi^*_{jk} \quad (j=0,1,2,\cdots,n-1) \quad (4)$$

ここに，　$\phi_{kj} = \exp\left(-2\pi\frac{ikj}{n}\right)$，　$\phi^*_{jk} = \phi^*_{kj} = \phi_{kj}$ の共役複素数　である。

式(2) をzについて解くと，節点 j の座標値 z_j は次のようにwによって表現することができる。

$$z_j = z_0 + \sum_{r=0}^{j-1} w_r \qquad (5)$$

3．目的関数とフーリェ係数の探索

移動する境界上の節点 j の評価量を E_j，その目標値を E_{oj} とし，目的関数を式(6) のように定義して，最小二乗問題として取り扱う。

$$f = \sum_j (E_j - E_{oj})^2 \rightarrow \min \qquad (6)$$

一方、境界の形状は式(5) よりフーリェ係数Cによって表現できるので，Cを未定変数とみなせば評価量EはCの関数であり，式(6) で定義された目的関数もCの関数となる。したがって，目的関数式

(6) を満足するように，フーリェ係数Cを決定すればよいことになる。式(5) で $j=n$ とおくと式(7) となり，C_0 は移動する境界の両端の座標値 z_0 と z_n によって定まるので，結局，探索する変数の最大数は，境界両端の座標値である z_0，z_n と（$n-1$）個の複素フーリェ係数（C_1，C_2，…，C_{n-1}）の和で，合計（$n+1$）個の複素数となる。これは，（$n+1$）個の節点について座標値を変数とする方法の数と一致する。

$$C_0=\frac{z_n-z_0}{n} \qquad (7)$$

$$\overline{C}_k=\begin{cases} C_k & (k=0,1,\cdots,n/2) \\ C_{n+k} & (k=-n/2+1,\cdots,-1) \end{cases} \qquad (8)$$

$$w_j=\sum_{k=-n/2+1}^{n/2}\overline{C}_k\ \phi^*_{kj} \qquad (9)$$

$$w_j=\sum_{|k|\leq N}\overline{C}_k\ \phi^*_{kj}+\sum_{|k|>N}\overline{C}_k\ \phi^*_{kj} \qquad (10)$$

いま，C_k について式(8) のようにおくと，変数変換によって式(4) は式(9) のようになる。このとき，$|k|$ が 0付近ならば ϕ^*_{kj} は j に関して穏やかに変動し，kがn/2に近づくにしたがって激しく振動することが三角関数の性質から知られている。そこで，wを式(10)のように2つの部分和に分け，式(5) に適用すれば，境界の形状をその概形と細部形状との和として表現することができる。したがって，形状が定まらない初期の段階では，フーリェ係数の項数としてn/2 より小さい Nを指定し，N 以上の項を無視して，少ないフーリェ係数の項数（未定変数）で形状の概略をまずつかみ，順次項数を増やすことによって細部の形状を決めていくことができるので，最適化計算の効率の向上を図ることが可能となる。また，境界の移動の方向として水平距離（x_j-x_0）を一定に保つようにy方向のみに移動させる場合や，鉛直距離（y_j-y_0）を一定に保つようにx方向のみに移動させる場合には、ある計算ステップにおけるCの変化量ΔCに対して，次のような条件（ $k=1,2,\cdots,n/2-1$ ）

（A）y方向のみに移動させる場合

$$\mathrm{Real}(\Delta C_0)=\mathrm{Real}(\Delta C_{n/2})=0$$
$$\mathrm{Real}(\Delta C_k)=-\mathrm{Real}(\Delta C_{n-k})$$
$$\mathrm{Imag}(\Delta C_k)=\mathrm{Imag}(\Delta C_{n-k})$$

（B）x方向のみに移動させる場合

$$\mathrm{Imag}(\Delta C_0)=\mathrm{Imag}(\Delta C_{n/2})=0$$
$$\mathrm{Imag}(\Delta C_k)=-\mathrm{Imag}(\Delta C_{n-k})$$
$$\mathrm{Real}(\Delta C_k)=\mathrm{Real}(\Delta C_{n-k})$$

を満足するように計算すればよく，これより探索するフーリェ係数は更に減少する。

4．むすび

以上，境界要素法の移動境界問題への適用について，有限複素フーリェ級数を応用する方法について述べた。境界が移動する問題では，移動後，境界が重なり合う等の不合理が生ずる場合がある。この点に対し本研究では，交差しない幾つかの閉曲線で囲まれた領域内部の巻き数（Winding Number）N_w は $N_w=1$ でなければならないという性質[7]を利用した。内部点を限りなく境界上に近づければ境界上でも $N_w=1$ が成立する。計算にあたっては，常に巻き数が1になることを確認しながら行った。

なお，計算例については当日報告する予定である。

5．参考文献

1)村川，明神，徳増，麻生，"応力集中低減を目的とする境界要素法を用いた最適形状設計"，日本機会学会論文集，46-412，1980.　2) Cheng,A.H.-D.,et al, " Boundary calculations of sluice and spillway flows "， J.Hydraulics Div. ASCE 107, 1981.　3)大上，草間，"境界要素法を用いた応力評価による形状決定問題"，中部支部講演概要集，1984.　4) Francavilla,A.,et al," Optimization of shape to minimize stress concentration "，J.Strain Analysis, 10-2, 1975.　5) Ligget,J.A.,et al, " Cubic spline boundary elements"，Int.J.Numerical Methods Engng, 17, 1981.　6)上坂，"かたちのスペクトル分析"，数理科学， 246, 1983.　7)野口，"不動点定理"，共立，1980.　8)大上，三井，草間，"表面応力評価による構造物の形状決定"，中部支部講演概要集，1985.