

熊本大学工学部 正員 ○三池 亮 次
同 上 正員 小 林 一 郎

1. はじめに 現在行なわれている有限変位解析多くは、ひずみは微小であるが、回転による変位は有限であるような幾何学的非線形有限変位解析に基づいている。そのひずみエントピー¹⁾は、GreenひずみとKirchhoff擬応力²⁾が対となるものである。Kirchhoff擬応力は、それ自身の中に変位成分を含んでおいてその取り扱いが面倒である。Kirchhoff擬応力ではなく、物理的応力を用いるときは、それが2階テンソルでないことからくる難点もあるが、物理的意義は明確となる。

筆者は、さらにせん断応力が無視される2次元骨組構造において、外力が有限変位に対してなす仮定力学は、物理的直応力が通常のひずみに対してなす以外に、一種の見かけのひずみ $(1 - \cos \theta)$ に対してなす仮定力学の複合に等しいことを指摘した³⁾。ここでは、せん断ひずみも無視し得る場合の仮定力学原理による基礎式を誘導する。

2. 有限ひずみ仮定力学の原理 さらに発看のとおり、物体内部の任意点に物体力 f が、境界において表面力 p が作用して、変形の中間状態の位置ベクトル x' から、有限の変位 u を生じてつり合い状態にあるものとする。外力 f と p が、有限変位 u に対してなす仮定力学の積分 ΔW は、

$$\begin{aligned}\Delta W &= \iint_A p \cdot \Delta u \, dA + \iiint_V f \cdot \Delta u \, dV = \iint_{A'} p^* \cdot \Delta u \, dA' + \iiint_{V'} f^* \cdot \Delta u \, dV' \\ &= \iint_{V'} \text{trace} \left\{ T_k^T \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right)^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right\} dV' = \iint_{V'} \text{trace} (T_k^T \Delta E_k) dV' = \Delta U'\end{aligned}\quad (1)$$

ここに、 T_k はKirchhoff擬応力であり、また、面積要素 dA と体積要素 dV は変形後におけるもので、 dA' と dV' は変形の中間状態におけるものである。また $p^* = p \delta A / \delta A'$ 、 $f^* = f \delta V / \delta V'$ 。

$$\Delta E_k = \Delta E_g + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \quad (2)$$

は、Greenひずみテンソル ΔE_g と回転を示すひずみ $\epsilon = 1/2 \Delta E_\theta = (\partial \Delta u / \partial x')^T \partial \Delta u / \partial x' / 2$ の和である。ここで、 ΔE_g は

$$\Delta E_g = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} + \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T + \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right\} \quad (3)$$

であり、Kirchhoff擬応力は、

$$T_k^T = \begin{bmatrix} \frac{\delta A_1}{\delta A'_1} & 0 & 0 \\ \frac{\delta A_2}{\delta A'_1} & \frac{\delta A_2}{\delta A'_2} & 0 \\ 0 & \frac{\delta A_3}{\delta A'_2} & \frac{\delta A_3}{\delta A'_3} \end{bmatrix} \Sigma^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \end{bmatrix}, \quad \Sigma^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

である。 Σ は、変形後の物体に作用する物理的応力マトリックス、 g_{ii} は共変計量テンソル $G_0 = (\partial x / \partial x')^T \partial x / \partial x'$ の対角要素である。

2次元骨組構造部材で、式(4)の第2次の $\sigma_{22} = 0$ であり、かつ、せん断応力 $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ が無視される場合について、さらに発看のとおりである。ここでは、 σ_{22} も、せん断応力 σ_{12} と σ_{21} も有限である場合の、式(1)の $\Delta U'$ を求める。式(1)の被積分項に現れるJacobianマトリックス

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \left[\frac{\partial x}{\partial x'_1} \quad \frac{\partial x}{\partial x'_2} \quad \frac{\partial x}{\partial x'_3} \right] \equiv [e_1 \quad e_2 \quad e_3] \quad (5)$$

上式の e_i は変変基座ベクトルである。変形の中間状態において定められた、物体内部の任意点の基準直交座

標線の、変形後の方向余弦 $Q_i = e_i / \sqrt{g_{ii}}$ であるから、式(1)より

$$\Delta U = \iiint_V \left[\sigma_{11} \frac{\delta A_1}{\delta A'_1} \sigma_{12} \frac{\delta A_1}{\delta A'_1} \left\{ l_1 \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_1} \right. \right. \\ \left. \left. \sigma_{21} \frac{\delta A_2}{\delta A'_2} \sigma_{22} \frac{\delta A_2}{\delta A'_2} \left\{ l_2 \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_1} \right. \right. \right\} \right] dV' \quad (6)$$

被積分項、

$$\Delta U = \sigma_{11} \frac{\delta A_1}{\delta A'_1} l_1 \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_1} + \sigma_{22} \frac{\delta A_2}{\delta A'_2} l_2 \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_2} + \sigma_{12} \frac{\delta A_1}{\delta A'_1} l_2 \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_1} + \sigma_{21} \frac{\delta A_2}{\delta A'_2} l_1 \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_2} \quad (6')$$

図・1 において、 i_1, i_2 を基本単位ベクトル。変形の中
間状態において埋め込まれた基準座標線の、変形後の方向余弦
あるいは単位ベクトルを l_1, l_2 とすると、変形の中間状態
における線素、 $\delta x'_i$ の相対変位は、その伸びを $\delta \Delta u_{ei}$ とすると

$$\delta \Delta u_i = \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_i} \delta x'_i = l_i (\delta x'_i + \delta \Delta u_{ei}) - i_i \delta x'_i \quad (7)$$

したがって、 $\cos \Delta \theta_i = l_i \cdot i_i$ である

$$l_1 \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_1} = \frac{\partial \Delta u_{e1}}{\partial x'_1} + (1 - \cos \Delta \theta_1), \quad l_2 \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_2} = \frac{\partial \Delta u_{e2}}{\partial x'_2} + (1 - \cos \Delta \theta_2) \quad \text{と、これに作用する物理的応力 } \sigma_{ij}.$$

図・1 変形の中間状態における立方体の変形

また、

$$l_2 \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_1} = l_2 \cdot \left\{ l_1 \left(1 + \frac{\partial \Delta u_{e1}}{\partial x'_1} \right) - i_1 \right\} = \cos \delta \frac{\partial \Delta u_{e1}}{\partial x'_1} + \cos \delta - \cos (\delta + \Delta \theta_1) \quad (9)$$

したがって、 $\delta = \pi/2 - (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2) \equiv \pi/2 - \Delta \delta$ であるから、

$$\cos \delta - \cos (\delta + \Delta \theta_1) = \sin \Delta \theta_1 \cos \Delta \theta_2 - \sin \Delta \theta_2 (1 - \cos \Delta \theta_1) = \sin (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2) - \sin \Delta \theta_2 \quad (10)$$

したがって、式(6)における、

$$\sigma_{12} \frac{\delta A_1}{\delta A'_1} l_2 \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial x'_1} = \sigma_{12} \frac{\delta A_1}{\delta A'_1} \left\{ \sin \Delta \delta - \sin \Delta \theta_2 + \sin \Delta \delta \frac{\partial \Delta u_{e1}}{\partial x'_1} \right\} \quad (11)$$

同様に、 $(\sigma_{21} \delta A_2 / \delta A'_2) l_1 \cdot \partial \Delta u / \partial x'_2$ についても、式(6)の被積分項である式(6)'は

$$\Delta U = \sigma_{11} \frac{\delta A_1}{\delta A'_1} \left\{ \frac{\partial \Delta u_{e1}}{\partial x'_1} + (1 - \cos \Delta \theta_1) \right\} + \sigma_{22} \frac{\delta A_2}{\delta A'_2} \left\{ \frac{\partial \Delta u_{e2}}{\partial x'_2} + (1 - \cos \Delta \theta_2) \right\} \\ + \sigma_{12} \frac{\delta A_1}{\delta A'_1} \left\{ \sin \Delta \delta - \sin \Delta \theta_2 + \sin \Delta \delta \frac{\partial \Delta u_{e1}}{\partial x'_1} \right\} + \sigma_{21} \frac{\delta A_2}{\delta A'_2} \left\{ \sin \Delta \delta - \sin \Delta \theta_1 + \sin \Delta \delta \frac{\partial \Delta u_{e2}}{\partial x'_2} \right\} \quad (12)$$

3. 近似解。式(4)で定義される物理的応力マトリックスは、2階テンソルである。せん断応力 σ_{12} と σ_{21} は、必ずしも等しくない。しかし、簡単な例題として、せん断ひずみは比較的小さいであり、変形後も埋め込み座標は直交性を保つと近似し、 $\sin \Delta \delta \approx \Delta \delta$ は通常、微小せん断ひずみと見做し、また $\sigma_{12} \delta A_1 / \delta A'_1 \approx \sigma_{21} \delta A_2 / \delta A'_2$ とし得るとき、

$$\Delta U = \sigma_{11} \frac{\delta A_1}{\delta A'_1} \left\{ \frac{\partial \Delta u_{e1}}{\partial x'_1} + (1 - \cos \Delta \theta_1) \right\} + \sigma_{22} \frac{\delta A_2}{\delta A'_2} \left\{ \frac{\partial \Delta u_{e2}}{\partial x'_2} + (1 - \cos \Delta \theta_2) \right\} + \sigma_{12} \frac{\delta A_1}{\delta A'_1} \cdot \Delta \delta \left(1 + \frac{\partial \Delta u_{e1}}{\partial x'_1} + \frac{\partial \Delta u_{e2}}{\partial x'_2} \right) \quad (13)$$

すなわち、せん断応力に対して、直ひずみ $\partial \Delta u_{e1} / \partial x'_1 + \partial \Delta u_{e2} / \partial x'_2$ の補正が必要となる。上式を用い、2次元骨組構造の軸力 $N + \Delta N$ 、弯げ - 力矩 $M + \Delta M$ 、せん断力 $Q + \Delta Q$ の各仮想変位は、 $\partial \Delta u_{e2} / \partial x'_2 \approx 0$ とし、

$$\Delta U = \int_0^L \left\{ \Delta e_m + (1 - \cos \Delta \theta_1) \right\} (N + \Delta N) + \Delta \phi' (M + \Delta M) + \Delta \delta (1 + \Delta e_m) (Q + \Delta Q) \right\} ds, \quad \Delta e_m = \frac{\partial \Delta u_{e1}}{\partial x'_1} \quad (14)$$

参考文献、1) 三池亮次：“有限変形における増分形工学と基礎理論”工学論文集、2) 三池小林、久田：“有限変位仮想仕事の原理による骨組構造解析”