

山梨大学工学部 正員 平島 健一
福島工業高等専門学校 正員 ○根岸 嘉和

① 緒言

本報告では、応力仮定型の一般化高次はり理論を最小コンプリメンタリエネルギーの原理に基づいて定式化し、本理論と他の一般化高次理論との関係を明らかにするとともに、数値例を通して精度特性について検討する。

② 理論の定式化

Fig. 1 に示すような平面応力状態のはりにおける応力成分を、上下表面での荷重条件を完全に満足させた次式で仮定する ($\zeta = z/b$, $-1 \leq \zeta \leq 1$)。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_x^{(n)} P_n(\zeta) \\ \tau_{xz} &= b \tau_{xz0} + b \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{xz}^{(n)} R_n(\zeta) \\ \sigma_z &= b^2 \sigma_{z0} + b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_z^{(n)} S_n(\zeta) \end{aligned} \right\} \text{-----}(1),$$

$$\text{and} \quad \left. \begin{aligned} \tau_{xz0} &\equiv \frac{(\bar{\tau}_{xz}^+ + \bar{\tau}_{xz}^-)}{2b}, \quad \tau_{xz}^{(0)} \equiv \frac{(\bar{\tau}_{xz}^+ - \bar{\tau}_{xz}^-)}{2b} \\ \sigma_{z0} &\equiv \frac{(\bar{\sigma}_z^+ + \bar{\sigma}_z^-)}{2b^2}, \quad \sigma_z^{(0)} \equiv -\frac{(\bar{\sigma}_z^+ - \bar{\sigma}_z^-)}{2b^2/3} \end{aligned} \right\} \text{-----}(1)_2$$

ここに $P_n(\zeta)$ は Legendre 多項式であり、 $R_n(\zeta), S_n(\zeta)$ はそれぞれ $P_n(\zeta)$ を 1 回および 2 回積分して得られる多項式で各々次式で与えられる (それらの低次数項について分布形を Fig. 2 に示した)。

$$\left. \begin{aligned} P_n(\zeta) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2 - 1)^n \\ R_n(\zeta) &= \int P_n(\zeta) d\zeta \\ S_n(\zeta) &= \int R_n(\zeta) d\zeta = \iint P_n(\zeta) d\zeta d\zeta \end{aligned} \right\} \text{-----}(2)$$

さらに変位を補助的に次の様に展開する

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)} P_n(\zeta) \\ w &= b w_0 + b \sum_{n=0}^{\infty} w^{(n)} R_n(\zeta) \end{aligned} \right\} \text{-----}(3)$$

以上の応力および変位を、はりに関する最小コンプリメンタリエネルギーの原理:

$$\begin{aligned} \Pi_c &= \iiint_V \left\{ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_z^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_z) + \frac{1}{2G} \tau_{xz}^2 \right\} dV \\ &\quad - \iint_{S_u} \{ \bar{u}_x \sigma_x + \bar{w}_z \sigma_z + (\bar{w}_x + \bar{u}_z) \tau_{xz} \} dS \rightarrow \text{最小} \end{aligned} \text{-----}(4)$$

に用い、応力の変分の係数関係式を整理し次式を得る。

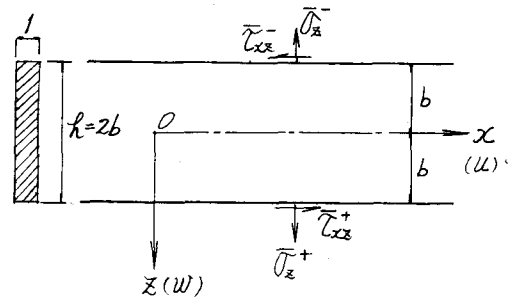


Fig. 1 Geometry of beam and surface tractions.

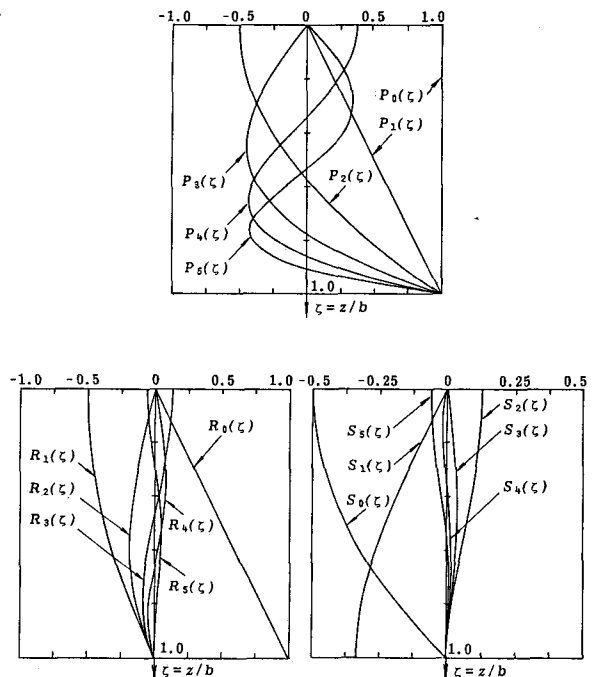


Fig. 2 Distributions along the thickness of functions $P_n(\zeta)$, $R_n(\zeta)$ and $S_n(\zeta)$.

(幾何・構成関係式)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(n)} &= E \epsilon_x^{(n)} - \frac{(2n+1)}{2} \nu b^2 \sum_{m=0}^{\infty} T_n^m \sigma_z^{(m)} - \delta_{n0} \nu b^2 \sigma_{z0} \\ \sum_{m=0}^{\infty} T_n^m w^{(m)} &= -\frac{1}{E} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \Lambda_n^m b^2 \sigma_z^{(m)} + \nu T_n^m \sigma_x^{(m)} \right\} \\ &\quad - \left(\frac{2}{3} \delta_{n0} - \frac{2}{15} \delta_{n2} \right) \sigma_{z0} \quad ; (n \neq 1) \\ \epsilon_x^{(n)} &= -\frac{(2n+1)}{2} \cdot \frac{b^2}{G} \sum_{m=0}^{\infty} T_n^m \left\{ \epsilon_{xz}^{(m)} - G w_{,x}^{(m)} \right\} \\ &\quad - \delta_{n1} \frac{b^2}{G} (\epsilon_{xz0} - G w_{,x}) \quad ; (n \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

上式中の T_n^m , Λ_n^m は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} T_n^m &= \int_{-1}^1 R_n(\xi) R_m(\xi) d\xi \\ \Lambda_n^m &= \int_{-1}^1 S_n(\xi) S_m(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

また δ_{mn} は Kronecker の delta である。

なお、付帯条件としての応力のつり合い式の重みつき積分表示は、(1) の応力仮定を用い $R_n(\xi)$ の重みをつけた積分を実行することにより、次式の様に求まる。

(つり合い方程式)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,x}^{(n)} + \epsilon_{xz}^{(n)} &= 0 \\ \epsilon_{xz,x}^{(n)} + \sigma_z^{(n)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

一方、上下表面での応力の境界条件は、(1), 2 の仮定の結果前述の通り完全に満足されている。

支配方程式(5), (7) の $n=1, 3, 5, \dots$ が曲げ弯矩に関するものであり、 $n=0, 2, 4, \dots$ が伸縮弯矩に関するものであること言うまでもない。

③ 他的一般化高次理論との関係

ここに示した理論式は、Hellinger-Reissner の原理によって定式化される著者らの混合仮定型高次理論と本質的に同等であり、本理論が応力係数と補助的

に仮定された変位係数を未知量としているのに対し、混合仮定理論では応力係数および、それと同レベルの重みつき積分平均変位が未知量になっている点があるのみであり、両者は互いに変位係数-重みつき積分平均変位関係式を用いて書き換えられる関係にある。他方、最小ポテンシャルエネルギーの原理に立脚した変位仮定型の一般化高次理論¹⁾は、変位係数のみが未知量となり前者に比べ支配式の数も少くなく、形も簡潔で扱いやすいという特長をえている。また精度面では、変位仮定理論は他の力学量に比べ ϵ_{xz} , σ_z の精度が高ったものとなるため、求められた σ_x とのつり合いと表面の応力境界条件を考慮して、これらを含め直す必要が生ずる場合もある。また混合仮定理論では、変位の重みつき積分平均が w に関しては、 $R_n(\xi)$ の直交性より変位係数の解と等価になるが、 w に関しては求められた重みつき積分平均変位を用い高さ方向分布を逆算する必要が生ずる。これらに比べ本理論式は多少複雑であるが、全ての応力と変位が直接高精度に求められるという利点を有していると言えよう。

④ 計算例

ここでは、上表面のみに正弦波状分布荷重が作用 ($\sigma_z = -p_0 \sin \frac{\pi x}{2b}$) した無限長はり ($\nu=0.3$, $2b/L=1.50$) を解析した結果を、古典解、弾性解³⁾、および Timoshenko 理論解⁴⁾とともに Fig. 3 に示す。ここで $1st$ とは本理論式の $n=0, 1$ を採用したものであり、 $2nd, 3rd$ はそれぞれ、 $n=0 \sim 3$, $n=0 \sim 5$ を採用した理論である。全般に $1st$ はまだ誤差が大きいが $2nd$ で、かなり弾性解に近い値を与え、 $3rd$ でさらに精度が向上していく様子がわかる。

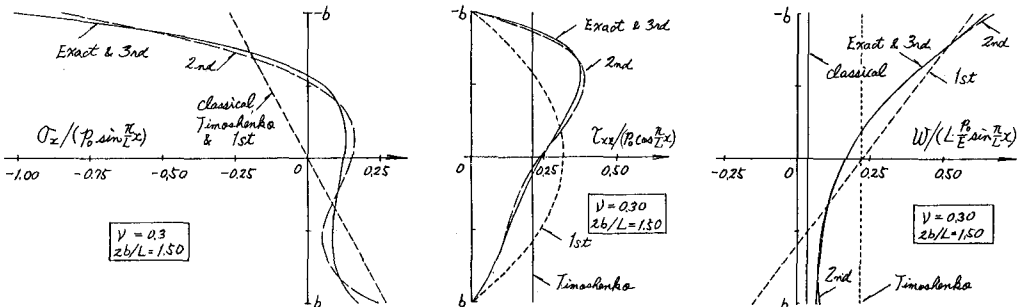


Fig. 3 Stresses and displacement along the thickness of infinite beam under the sinusoidal load.

[参考文献] 1)~2) 平島, 根岸: 工学会論文集, No. 350/I-2, pp. 187~196, pp. 35~354, 1984.

3) Pagano, N. J.: J. Comp. Mat., Vol. 4, pp. 20~34, 1974. 4) Timoshenko, S. P.: Phil. Mag., Vol. 43, pp. 125~131, 1922.