Ⅳ－160　時間変動を考慮した道路交通量配分モデルとその解法に関する検討

名古屋大学　正員　河上　省吾
○名古屋工業大学　正員　溝上　章志
愛　知　県　正員　鈴木　総幸

1．はじめに

本研究の目的は、動的総走行時間最小化配分に従う多種ODの動的フローを求めるモデルを開発することにある。動的配分モデルは、①シミュレーション手法[1] ②各時間断面で静的手法を利用する方法[2] ③モデルの動学化手法[3][4]に分類できる。①②は実用的ではあるが理論的根拠に薄い。③は時々刻々と変動する交通現象を再現でき、任意の行動規範に従った交通需要を予測できるが、現実のネットワークへの適用は、非線形性、計算時間等の制約により、かなり困難と思われる。本モデルは、松井[3]の数学モデルを理論的基礎とし、Marchant[4]のOrdered Solution Property（以後O.S.Pと記す）を持つLPによる定式化を、時間区間別OD別リンク交通量を変数とした0-1混合整数計画問題に拡張したもので、モデルの実用化のための解法についても考察を加えている。

2．動的総走行時間最小化配分の定式化

動的総走行時間最小化配分とは、一定時間帯に道路網を走行する車の総走行時間を最小にする配分であり、そのフローを求めるためには fig.1 の斜線部の面積を最小にすれば良い。今、時間帯を微小時間間隔 Δt ずつに離散化すると、時間区間別OD別リンク交通量 $x_{ij,l}^{t}$ は以下の数理計画問題(P1)の解として求めることができる。

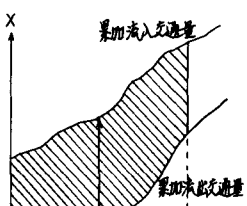


fig.1 動的総走行時間最小化配分

(P1)

$$\text{Min}: \sum_{i}\sum_{j}\sum_{t}^{T}\sum_{l}^{L} x_{ij,l}^{t}\cdot\Delta t \qquad (1)$$

s.t.

<状態方程式> $\forall i,\forall j,\forall g\in\mathcal{N},\forall t$

$$\begin{cases} \sum_{k\in B(g)} x_{ij,k}^{t} = \sum_{k\in A(g)} x_{ij,k}^{t} - \sum_{k\in A(g)} \alpha_{ij,k}^{t} g_k(X_{k,t}) + \sum_{k\in B(g)} \alpha_{ij,k}^{t} g_k(X_{k,t}) & \text{if } g\neq i,g\neq j \\ \sum_{k\in B(i)} x_{ij,k}^{t} = \sum_{k\in A(i)} x_{ij,k}^{t} - \sum_{k\in A(i)} \alpha_{ij,k}^{t} g_k(X_{k,t}) + O_{ij}^{t} & \text{if } g=i,g\neq j \\ \sum_{k\in B(j)} x_{ij,k}^{t} = 0 \quad \text{ただし } \alpha_{ij,k}^{t} = x_{ij,k}^{t}/X_{k,t} & \text{if } g\neq i,g=j \end{cases} \qquad (2)$$

<容量制約> $X_{k,t} = \sum_{i}\sum_{j} x_{ij,k}^{t} \le C_k \quad \forall t,\forall l \qquad (3)$

<非負条件> $x_{ij,k}^{t} \ge 0 \quad \forall i,\forall j,\forall t,\forall l \qquad (4)$

ここで、(i,j)：ODペア $(i,j=1,\cdots,N)$、$\mathcal{N},\mathcal{A}$：有向グラフ $G=\{\mathcal{N},\mathcal{A}\}$、$l$：アーク番号 $(l=1,\cdots,L)$、t：時間区間 $(t=0,1,\cdots,T)$、$X_{k,t}$：時間区間 t のアーク l 上交通量、$A(g)$：ノード g から出るアーク集合、$B(g)$：g に入るアーク集合、$g_k(\cdot)$：アーク l からの流出関数、O_{ij}^{t}：時間区間 t、(i,j) ODペアの発生交通量、C_k：アーク l の交通容量を示している。

3．部分線形化、0-1変数の導入による再定式化

流出関数 $g_k(X_{k,t})$ は $g_k(X_{k,t})=(A_k-B_kX_{k,t}/L_k)(X_{k,t}/L_k)$ 等の非線形関数であるから、(P1)は非線形計画問題となる。しかし、$X_{k,t}$ の一元関数であるから、交通量 $X_{k,t}$ を $K(l)$ 分割することによって fig.2(a) に示すように、g_k は $a_k^{k_l}\le X_{k,t}\le a_k^{k_l+1}$ で $g_k=b_k^{k_l}+g_k^{k_l+1}(X_{k,t}-a_k^{k_l})$ のように近似することができる。ここで、$(a_k^{k_l},b_k^{k_l})$, $k_l=1,\cdots,K(l)$ は $g_k(X_{k,t})$ と判線との交点であり、$g_k^{k_l+1}=(b_k^{k_l+1}-b_k^{k_l})/(a_k^{k_l+1}-a_k^{k_l})$ である。$0\le x_{k,t}^{k_l}\le a_k^{k_l}-a_k^{k_l-1}$ なるように $X_{k,t}$ を $K(l)$ 分割したとき

「$x_{k,t}^{k_l+1}>0$ ならば $x_{k,t}^{k_l}=a_k^{k_l}-a_k^{k_l-1}=c_k^{k_l}$ とする」　(5)

というO.S.P.のもとで、g_k は

$$X_{k,t}=\sum_{k_l=1}^{K(l)} x_{k,t}^{k_l} \quad \text{かつ} \quad g_k=b_k^{0}+\sum_{k_l=1}^{K(l)} g_k^{k_l}x_{k,t}^{k_l} \qquad (6)$$

なる線形式で表わすことができる。$g_k(X_{k,t})\le X_{k,t}$ であるから $|g_k^{k_l}|\le 1$ となり、$g_k^{k_l}$ と $x_{k,t}^{k_l}$ との関係は fig.2(b) のようになる。また、$\alpha_{ij,k}^{t}=x_{ij,k}^{t}/X_{k,t}=x_{ij,k}^{t,k_l}/x_{k,t}^{k_l}=\text{const.}$ から、式(2)において $\sum_{k\in A(g)}\alpha_{ij,k}^{t}g_k(X_{k,t})=\sum_{k\in A(g)}x_{ij,k}^{t,k_l}/x_{k,t}^{k_l}\sum_{k_l=1}^{K(l)}g_k^{k_l}x_{k,t}^{k_l}=\sum_{k\in A(g)}\sum_{k_l=1}^{K(l)}g_k^{k_l}x_{ij,k}^{t,k_l}$ となり、分割区間間の連続性が保存される。$x_{ij,l}^{t,k_l}$ は t 時間区間アーク l 上 (i,j) ODペア交通量を $K(l)$ 分割したときの k_l 番目分割交通量、$C_k^{k_l}$ はアーク l 容量の k_l 番目分割交通容量である。一方、O.S.P.(5)は、if ～ then ～ の形の条件付制約式であるが、微

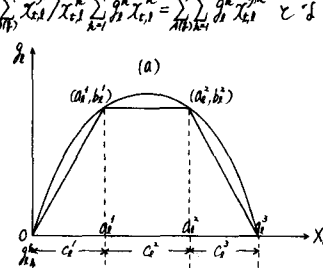


fig.2　流出関数の線形化

小定数εと0-1変数$y_{t,l}^{k}$を用いると、

$$\left.\begin{aligned} & C_t^k - \sum_i\sum_j x_{t,l}^{ij,k} \geq \varepsilon\,(1-y_{t,l}^{k}) \\ & C_t^{k+1} y_{t,l}^{k} - \sum_i\sum_j x_{t,l}^{ij,k} \geq 0 \\ & \sum_i\sum_j x_{t,l}^{ij,k} \geq C_t^k y_{t,l}^{k} \\ & y_{t,l}^{k} = 0 \text{ or } 1 \quad {}^{\forall}t,{}^{\forall}l,\ k=1,\cdots,K(l)-1 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

なる線形不等式と同値になるから、(P1)は以下に示す0-1混合整数計画問題(P2)に再定式化できる。

(P2)

$$\text{Min}: \sum_i\sum_j\sum_t\sum_l\sum_k x_{t,l}^{ij,k}\cdot\Delta t \quad (8)$$

s.t.

<状態方程式>
$$\left.\begin{aligned} & \sum_{h(i)}\sum_{k=1}^{K(l)} x_{t+1,l}^{ij,k} = \sum_{h(i)}\sum_{k=1}^{K(l)} x_{t,l}^{ij,k} - \sum_{h(i)}\sum_{k=1}^{K(l)} g_{t,l}^{ik} x_{t,l}^{ij,k} + \sum_{h(j)}\sum_{k=1}^{K(l)} g_{t,l}^{jk} x_{t,l}^{ji,k} \quad \text{if } {}^{\forall}i,{}^{\forall}j \\ & \sum_{h(i)}\sum_{k=1}^{K(l)} x_{t+1,l}^{ij,k} = \sum_{h(i)}\sum_{k=1}^{K(l)} x_{t,l}^{ij,k} - \sum_{h(i)}\sum_{k=1}^{K(l)} g_{t,l}^{ik} x_{t,l}^{ij,k} + O_t^{ij} \quad \text{if } {}^{\forall}i,{}^{\forall}j \\ & \sum_{h(i)}\sum_{k=1}^{K(l)} x_{t+1,l}^{ij,k} = 0 \quad \text{if } {}^{\forall}i,{}^{\forall}j \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

<容量制約> $\sum_i\sum_j x_{t,l}^{ij,k} \leq C_t^k \quad {}^{\forall}t,{}^{\forall}l,{}^{\forall}k$ (10)

<流出量非負条件> $\sum_{k=1}^{K(l)} g_{t,l}^{ik} x_{t,l}^{ij,k} \geq 0 \quad {}^{\forall}i,{}^{\forall}j,{}^{\forall}t,{}^{\forall}l$ (11)

<非負条件> $x_{t,l}^{ij,k} \geq 0 \quad {}^{\forall}i,{}^{\forall}j,{}^{\forall}t,{}^{\forall}l,{}^{\forall}k$ (12)

<O.S.P> 式(7)

4. 解法に関する考察

(P2)の決定変数は、実数解$x_{t,l}^{ij,k}$が$T\cdot N^2\cdot L\cdot\sum_{l=1}^{L}K(l)$、整数解$y_{t,l}^{k}$が$T\cdot L\cdot\sum_{l=1}^{L}K(l)$となり、係数行列も極めて大きくなる。モデルを実用化するためには、制約条件のマトリックス構造を把握し、その特性を有効に利用した解法を適用することが重要である。そこで、式(7), (9)~(12)の各制約条件をマトリックスを用いて表現すると以下のようになる。

$$\left.\begin{aligned} & M^+ I X_{t+1} + \{M^+(G-I) - M^- G\} X_t = 0 \\ (9)\rightarrow\ & M^+ I X_{t+1} + M^+(G-I) X_t = O_t \\ & M^- I X_{t+1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$(10)\rightarrow F X_t \leq Q \quad (14)$$

$$(11)\rightarrow -\Lambda X_t \leq 0 \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} & (F \mid \varepsilon E)\, Z_t \leq Q_t \\ (7)\rightarrow\ & (\bar{P} \mid \bar{P})\, Z_t \leq 0 \\ & (-F \mid R)\, Z_t \leq 0 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$I=\begin{pmatrix} \bar{I}_L & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{I}_L \end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix} \bar{g}_L & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{g}_L \end{pmatrix}$, $\bar{I}_L=\underbrace{(1\cdots1)}_{K(l)}$, $\bar{g}_t=(g_t^{1'}\cdots g_t^{K(l)})$,

$M^+=\{m_{jl}^+\}=\begin{cases} m_{jl} & \text{if } m_{jl}=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$, $M^-=\{m_{jl}^-\}=\begin{cases} m_{jl} & \text{if } m_{jl}=-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$,

$M=\{m_{jl}\}$：インシデンスマトリックス，

$F=(E\cdots E)$, $Q=(C_t^{1'}\cdots C_t^{K(l)}\cdots C_L^{K(l)})^T$, Q_t：Qの要素からεをひいた行列，

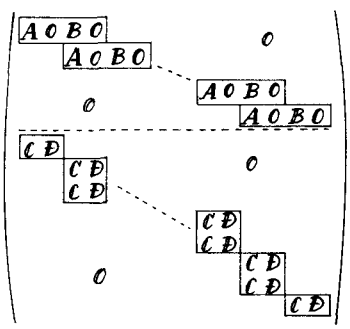
$\Lambda=(G\cdots G)$, E：$\sum K(l)\times\sum K(l)$の単位行列，

$\bar{P}=\begin{pmatrix} 0\cdots1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\cdots1 \end{pmatrix}$, $\bar{\bar{P}}=\begin{pmatrix} -C_t^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -C_t^{K(l)} \end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix} C_t^{1'} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_t^{K(l)} \end{pmatrix}$

$X_t=(x_{t,1}^{1'}\cdots x_{t,1}^{k}\cdots x_{t,L}^{K(L)})^T$, $Y_t=(y_{t,1}^{1'}\cdots y_{t,1}^{k}\cdots y_{t,L}^{K(L)})^T$, $Z_t=(X_t^T \mid Y_t^T)^T$

であり、式(13)のX_t, X_{t+1}の係数ベクトル、右辺ベクトルをそれぞれA, B, O_t'とすると、時間区間tと$t+1$の制約条件マトリックスは以下のような*nested*な階段構造を持つ。また、$(-\Lambda \mid F \mid \bar{P} \mid -F)^T = C$、$(0 \mid \varepsilon E \mid \bar{\bar{P}} \mid R)^T = D$とおき、行の入換え等の変形を行った後の全時間帯にわたる制約条件の係数マトリックスは、左図のように、連続変数と整数変数が分離でき、整数変数がブロック条件式にのみ含まれるような対角構造となる。このような構造を持つ混合整数計画問題に対する有効なアルゴリズムは三宮[5]により開発されており、通常の分枝限定法に比べて極めて計算能力が高く、本研究で対象としているような大規模な問題にも十分対応できるものと考えられる。

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ -\Lambda & 0 & & \\ F & 0 & & \\ F & \varepsilon E & 0 & \\ \bar{P} & \bar{P} & & \\ -F & R & & \\ & & -\Lambda & 0 \\ & & F & 0 \\ 0 & & F & \varepsilon E \\ & & \bar{P} & \bar{P} \\ & & -F & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \\ X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} O_t' \\ 0 \\ Q \\ Q_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \\ Q_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



5. おわりに

本研究では、動的総走行時間最小化配分に従う各動O-D動的フローを求めるためのモデルを、時間区間別O-D別リンク交通量を変数とした0-1混合整数計画問題として定式化し、実用化のための解法について考察を加えた。実際の道路網への適用、変数の低減、等時間原則配分へのモデルの拡張、動的O-D交通量の予測手法の開発が今後の課題である。

参考文献

1) 川山・中村：動的な交通量配分手法，交通工学，Vol.17, No.2, pp.4-14, 1982

2) 河上・溝上・鈴木：実用的な時間帯別交通量配分手法の開発とその適用性に関する検討，第39回土木学会年次学術講演会講演概要集投稿中，1984

3) 松井：総走行時間最小化配分と等時間原則配分の動的比較，土木学会論文報告集，No.339, pp.239-242, 1983

4) K.Merchant：*A Model and an Algorithm for the Dynamic Traffic Assignment Problems*, Transportation Science, Vol.12, No.3, pp.183-199, 1978

5) 三宮・稲津・塚野：対角構造を持つ混合整数線形計画問題の解法，計測自動制御学会論文集，Vol.16, No.2, pp.210-215, 1981