

1. まえがき

筆者らは、指数関数系の回帰式 $y = a\{1 - e^{-(\frac{x}{b})^m}\} + C$, $y = ae^{-(\frac{x}{b})^m} + C$ を用いて ①杭や地盤の載荷試験から得られる荷重-変位曲線^{(1)~(6)}, ②標準貫入試験から得られる打撃回数・累計貫入量曲線⁽⁷⁾⁽⁸⁾, ③一軸、三軸圧縮試験から得られる応力-ひずみ曲線⁽⁹⁾, ④構造物や盛土などの沈下量-時間曲線⁽¹⁰⁾, ⑤圧密試験から得られる間隙比-圧密圧力曲線⁽⁶⁾などの整理および評価を行っている。

上記回帰式における4つの回帰係数 m, a, b, C を求めるには、計算式の展開や計算方法などに若干の工夫が必要であり、これらについてはすでに文献(11)~(14)で述べた。また、回帰係数のうち、既知値 a を既知とした場合の計算方法については文献(15)で示した。

今回の報告は、 m, a, b, C の回帰係数のうち、定数項 C が既知の場合の計算方法について述べたものである。

2. 数学モデルと回帰係数の求め方

数学モデルは(1)式、(2)式で示される。

$$y = a\{1 - e^{-(\frac{x}{b})^m}\} + C \quad (1)$$

$$y = ae^{-(\frac{x}{b})^m} + C \quad (2)$$

ここに、 m, C は正あるいは負の、 a, b は正の符号をもつ値である。(1)式、(2)式は、それぞれ統計学で扱うワイブル分布曲線 ($m=1$ のとき指数分布曲線)、コーシー分布曲線に対応する。(1)式の y および C を a で割って規格化し、 $C/a = 0.1$ として、 m をパラメータとして描いたものが図-1である。

以下に、(1)式、(2)式 of 回帰係数のうち、定数項 C を既知として、 m, b, a を求めるための式を展開するが、この2つの式はほぼ同じ操作をすることになるので、(1)式を中心に述べ、(2)式については特に必要な部分のみを列挙する。

(1)式の回帰モデルを(3)式とする。

$$y = a\{1 - e^{-(\frac{x}{b})^m}\} + C + \varepsilon \quad \varepsilon: \text{誤差項} \quad (3)$$

残差平方和 $S(a, b, C, m)$ は、(3)式に n 組の測定値をあてはめて整理すれば、(4)式となる。

$$S(a, b, C, m) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - a\{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\} - C]^2 \quad (4)$$

(4)式の残差平方和 $S(a, b, C, m)$ が最小になるように、 m, b, a を推定することになる。

(4)式を a および b について、それぞれ微分し、その

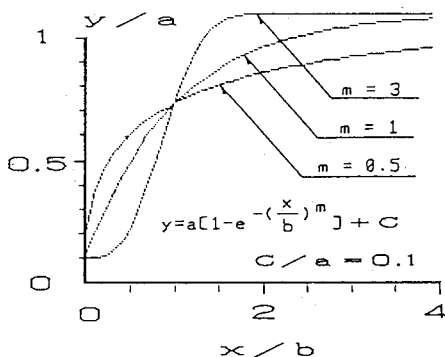


図-1 ワイブル分布曲線

結果を0と置くことによって、2つの正規方程式が得られる。この2つの式から a について求め、この a をそれぞれ a_1 および a_2 とすれば、(5)式、(6)式となる。

$$a_1 = (F_3 - CF_2)/F_1 \quad (5)$$

$$a_2 = (F_7 - CF_6)/F_5 \quad (6)$$

ここに、 $F_1 = \sum_{i=1}^n \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}^2$, $F_2 = \sum_{i=1}^n \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}$, $F_3 = \sum_{i=1}^n y_i \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}$, $F_5 = \sum_{i=1}^n x_i^m e^{-(\frac{x_i}{b})^m} \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}$, $F_6 = \sum_{i=1}^n x_i^m e^{-(\frac{x_i}{b})^m}$, $F_7 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^m e^{-(\frac{x_i}{b})^m}$ である。

(5)式から(6)式を引くことによって、 a_1 と a_2 を消去できる。すなわち、(7)式なる形の正規方程式が得られる。

$$f(b, C, m) \equiv a_1 - a_2 = 0 \quad (7)$$

任意の m について、(7)式を解けば b を求めることができる。これは、Newton-Raphson法によって解くことができる。すなわち、反復関数(8)式を用いて、 b の初期値、収束精度を与えて収束計算すればよい。

$$b_{i+1} = b_i - [f(b, C, m) / \partial f(b, C, m) / \partial b]_{b=b_i} \quad (8)$$

ここに、

$$\frac{\partial f(b, C, m)}{\partial b} = \frac{m}{b^{m+1}} \left[\frac{(-F_7 + CF_6)F_1 + 2(F_3 - CF_2)F_5}{F_1^2} - \frac{(F_8 - CF_9)F_5 - (F_7 - CF_6)F_{10}}{F_5^2} \right] \quad (9)$$

$$F_8 = \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 y_i e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}, F_9 = \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m},$$

$$F_{10} = \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m} \{1 - 2e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}\} \text{ である。}$$

(9)式の収束値を(5)式あるいは(6)式に代入すれば a が求まる。このときの残差平方和 $S(a, b, c, m)$ を(4)式で求め、この値が最小になるような m を求めればよい。

(2)式についても同様の手順で収束計算を行なえば、回帰係数を求めることができる。ただし、この場合(9)式を(9)式に置きかえる必要がある。

3. 計算例

杭径1m、長さ23.5mのリバース杭の鉛直載荷試験から得られた荷重・変位曲線の関係に(1)式を適用した計算例を示す。使用データは図-2中の表に示したもので、 X は変位(mm)、 Y は荷重(tf)である。(1)式の定数項 $C=50$ とし、 m および b の収束精度を 1×10^{-6} として、6組の測定値をあてはめた結果、回帰係数 m, a, b 、残差平方和SSRは表-1の(1)の欄に示す値となった。測定値を白丸でプロットし、この計算結果を示したものが図-2である。また、表-1の(2)の欄は、(1)式において $C=0$ とした場合、(3)は C を考慮した場合、(4)は、 $C=0$ とし、 $a=600$ として計算した結果である。なお、 b の初期値をうまく選択しなければ、収束しない場合もあるので注意されたい。

4. まとめ

(1)式、(2)式のような指数関数系の回帰式を用いて、まえがきで述べた①~⑤の曲線を主観を入れずに評価する手法を提案している。土質基礎工学で取り扱う現象にはこの他にもまた似たような現象があり、それらにもこの手法を適用できるものと思われる。

$$\frac{\partial f(b, c, m)}{\partial b} = \frac{m}{b^{m+1}} \left[\frac{(F_7 - CF_6)F_1 - 2(F_3 - CF_2)F_5}{F_1^2} - \frac{(F_8 - CF_9)F_5 - 2(F_7 - CF_6)F_{10}}{F_5^2} \right] \quad (9)'$$

$$\text{ここに、} F_1 = \sum_{i=1}^n \{e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}\}^2, F_2 = \sum_{i=1}^n e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m},$$

$$F_3 = \sum_{i=1}^n y_i e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}, F_5 = \sum_{i=1}^n x_i^m \{e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}\}^2,$$

$$F_{10} = \sum_{i=1}^n \{x_i^m e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}\}^2, F_6 \sim F_9 \text{ は (9) 式と同じである。}$$

表-1 回帰係数

	(1)	(2)	(3)	(4)
M	1.01856	0.755235	1.21630	0.857731
A	564.386	657.726	517.545	600
B	3.05721	3.28941	3.13527	2.61272
C	50	0	85.9474	0
SSR	684.778	2536.57	41.4271	3343.12
	C:fix	C=0		C=0, A:fix

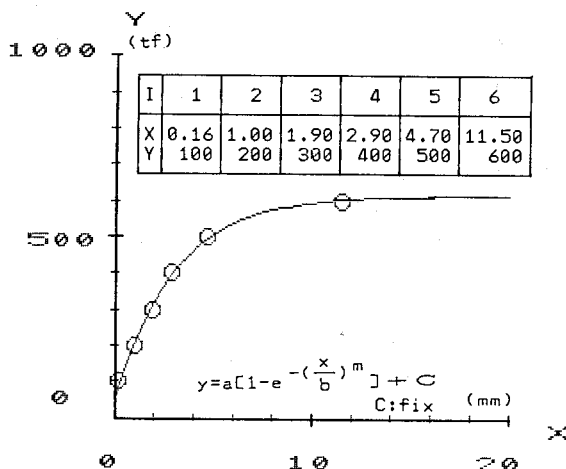


図-2 荷重・変位曲線のあてはめ

参考文献

- 1) 宇都・冬木・近藤・桜井; 74の載荷試験結果の一整理方法, 第13回土質工学研究発表会, 1978.
- 2) 塩井・宇都・冬木・近藤・桜井; 杭の荷重・変位曲線の非線形回帰結果による支持力の一評価法, 第23回土質工学シンポジウム, 1978.
- 3) 塩井・光家・宇都・冬木・桜井; 杭の水平載荷試験での降伏点の評価法, 杭の水平載荷試験に関するシンポジウム, 土質工学会, 1979.
- 4) 浅沼・福井・堀部・宇都・冬木・桜井; 各種施工法による杭の支持力について, 低振動・低騒音杭工法の施工法と支持力に関するシンポジウム, 土質工学会, 1982.
- 5) 浅田・宇都・冬木・桜井; ニューマチックケーソン内における平板載荷試験, 平板載荷試験に関するシンポジウム, 土質工学会, 1979.
- 6) 宇都・冬木・桜井; 指数関数系の回帰式について, 第18回土質工学研究発表会, 1983.
- 7) 宇都・冬木・近藤・石塚; 標準貫入試験に関する基礎的研究(3), 第13回土質工学研究発表会, 1978.
- 8) 桜井・溝口・石塚・冬木・宇都; SPTの記録とその整理方法, サウンディングシンポジウム, 土質工学会, 1980.
- 9) 石原・森・木村・宇都・冬木・桜井; 軟弱地盤における橋台水平移動の一予測法, 第26回土質工学シンポジウム, 1981.
- 10) 石原・小野・有木・宇都・冬木・桜井; アプローチクッション方式橋台の長期沈下予測, 第24回土質工学シンポジウム, 1979.
- 11) 宇都・冬木・桜井; 載荷試験から得られる荷重・変位曲線の非線形回帰計算について(その1), 第7回関東支部年次研究発表会, 土木学会, 1980.
- 12) 宇都; コンピュータの利用(主にパーソナルコンピュータを対象にして), 最近の土質・基礎に関する諸問題講習会講演資料, 土質工学会編, 1982.
- 13) 宇都・冬木・桜井; 載荷試験から得られる荷重・変位曲線の非線形回帰計算について(その2), 土木学会第37回年次学術講演会, 1982.
- 14) 宇都・冬木・桜井; 同上(其3), 土木学会第38回年次学術講演会, 1983.
- 15) 宇都・冬木・桜井; 指数関数系の回帰式について, その2. (飽和値 a が既知の場合), 第18回土質工学研究発表会, 1984.